

Domácí úkol č. 8

Zadáno: 8. a 10. 4.

Deadline: 22. a 23. 4.

1. Určete poloměr konvergence následující mocninné řady a vyšetřete konvergenci na kružnici konvergence

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Hint: Ke kompletnímu vyšetření dané řady je třeba použít Raabeho kritérium.

2. Sečtěte následující číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}.$$

Řešení

1. Označme $b_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$. Pro určení poloměru konvergence se podívejme na výraz

$$\frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{(2k+2)(2k+3)}{2(k+1)^2} = \frac{4k^2 + 10k + 6}{2k^2 + 4k + 2} \rightarrow 2 \quad k \rightarrow \infty.$$

Odtud už dostáváme $R = 2^p$ pro všechna $p \in \mathbb{R}$, protože funkce y^p je spojitá a můžeme tak použít VOLSFS s vnější funkcí spojitou.

Pro vyšetření chování na kružnici konvergence položíme $z = 2^p e^{i\varphi}$ a dosadíme do naší řady. Dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{in(\varphi+\pi)} \left(\frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Na vyšetření konvergence této řady budeme chtít použít Dirichletovo kritérium, protože pro $\varphi \neq \pi$ má $\{e^{in(\varphi+\pi)}\}$ omezené částečné součty. Podíváme se tak na monotonii posloupnosti $c_n = 2^n b_n = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$. Podobně jako výše máme

$$\frac{c_k}{c_{k+1}} = \frac{(2k+2)(2k+3)}{4(k+1)^2} = \frac{4k^2 + 10k + 6}{4k^2 + 8k + 4} > 1$$

pro všechny $k \geq 1$, proto $\{c_n\}$ je monotónní (klesající) posloupnost, a totéž tak platí pro $\{c_n^p\}$ pro kladná $p \in \mathbb{R}$. Pro záporná p je posloupnost naopak rostoucí a pro $p = 0$ zkoumaná řada očividně nekonverguje nikdy, protože je porušena nutná podmínka konvergence řady.

Podívejme se nyní na limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Pro její určení použijeme odhady faktoriálu. Máme $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$, proto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} n}{\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1} \sqrt{2n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{en}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{2\sqrt{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{e}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \frac{e}{2} \cdot 0 \cdot e^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Zjistili jsme tak, že pro $p > 0$ řada konverguje na kružnici konvergence všude mimo bod $\varphi = \pi$ a pro $p \leq 0$ řada nekonverguje na kružnici konvergence nikde, protože je porušena nutná podmínka konvergence.

Zbývá nám ještě vyšetřit bod $\varphi = \pi$, kde je zkoumaná řada jen $\sum c_n^p$. Už jsme zjistili, že $c_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, takže máme silné podezření, že potřebujeme $p > 2$, aby řada konvergovala. Jak je to doopravdy zjistíme Raabeho kritériem:

$$\begin{aligned} k \left(\frac{c_k^p}{c_{k+1}^p} - 1 \right) &= k \left(\left(\frac{4k^2 + 10k + 6}{4k^2 + 8k + 4} \right)^p - 1 \right) \\ &= k \left(\left(1 + \frac{1}{2(k+1)} \right)^p - 1 \right) \\ &= k \left(1 + \frac{p}{2(k+1)} + \frac{p(p-1)}{8(k+1)^2} + o((k+1)^{-2}) - 1 \right) \\ &= \frac{pk}{2(k+1)} + \frac{p(p-1)k}{8(k+1)^2} + o((k+1)^{-1}) \rightarrow \frac{p}{2} \end{aligned}$$

a naše podezření je potvrzeno, pro $p > 2$ řada v bodě $\varphi = \pi$ konverguje a zároveň na celé kružnici konvergence konverguje absolutně. Příklad

$p = 2$ také vyšetříme Raabeho kritériem, protože máme

$$k \left(\frac{c_k^2}{c_{k+1}^2} - 1 \right) = \frac{k}{k+1} + \frac{k}{4(k+1)^2} < 1$$

pro všechna $k \geq 1$ a v takovém případě nám Raabeho kritérium říká, že řada diverguje. Konečně máme tak vyšetřeny všechny případy a víme, že pro $p \leq 2$ řada v bodě $\varphi = \pi$ nekonverguje.

2. Ulehčíme si trochu práce následující úvahou:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

a sečteme jen řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Zde využijeme naše znalosti o tom, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$$

pro $|x| < 1$ (poloměr konvergence této mocninné řady je 1) a Abelovu větu, v bodě $x = 1$ tato řada konverguje a proto její součet je dán jako $\lim_{x \rightarrow 1-} \ln(1+x) = \ln 2$.

Nakonec tedy dostáváme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)} = 1 - 2 \ln 2.$$