

Domáci úkol č. 9

Zadáno: 22. a 23. 4.

Deadline: 29. a 30. 4.

1. Najděte definiční obor funkce $f(x, y)$, spočtěte parciální derivace druhého řádu a určete, zda jsou záměnné.

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x + y}{1 - xy} \right)$$

2. Najděte jednotkový vektor, v jehož směru má derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(1, 1)$ největší, nejmenší a nulovou hodnotu.

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

Řešení

1. Definiční obor zadané funkce je

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 1\}.$$

Na svém definičním oboru je funkce spojitá a má spojitě parciální derivace všech řádů, měli bychom tak objevit, že smíšené parciální derivace jsou záměnné. Začínáme prvními derivacemi, máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \frac{(1-xy) - (x+y)(-y)}{(1-xy)^2} \\ &= \frac{1+y^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2} \\ &= \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \frac{(1-xy) - (x+y)(-x)}{(1-xy)^2} \\ &= \frac{1+x^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2} \\ &= \frac{1+x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+y^2}. \end{aligned}$$

Odtud už snadno

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-2y}{(1+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Smíšené druhé parciální derivace jsou skutečně záměnné.

Zamysleme se na chvíli také, co znamená, že parciální derivace vyšly tak jednoduše. Ty totiž naznačují, že zadaná funkce je ve skutečnosti totožná s funkcí $g(x, y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$. A skutečně tomu tak je, alespoň tedy na definičním oboru funkce f , což plyne ze součtového vzorce

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}.$$

Stačí vzít arctg obou stran a položit $x = \operatorname{tg} A, y = \operatorname{tg} B$.

2. Funkce $f(x, y)$ je polynom, je tak definovaná všude, má ve všech bodech spojitě parciální derivace všech řádů a pro libovolný směrový vektor $\mathbf{v} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ je tak derivace ve směru $\mathbf{v}$ dána vztahem

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{v}.$$

Máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y & \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x + 2y & \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= 1 \\ \nabla f(1, 1) &= (1, 1) \\ \nabla f(1, 1) \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi) &= \cos \varphi + \sin \varphi.\end{aligned}$$

Na intervalu $\varphi \in [0, 2\pi)$ nás tak zajímá, kde má funkce $h(\varphi) = \cos \varphi + \sin \varphi$ maximum, minimum a nulové body.

Nejprve určíme nulové body, z průběhů funkcí $\cos$ a $\sin$ vidíme, že to jsou body $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ a $\varphi = \frac{7\pi}{4}$. Těm tedy odpovídají vektory $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ a $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Pro určení maxima a minima si pomůžeme derivací. Máme $h'(\varphi) = \cos \varphi - \sin \varphi$ a odsud už lehce zjistíme bod maxima $\varphi = \frac{\pi}{4}$, tedy vektor $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ a bod minima $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, tedy vektor $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.