

Domácí úkol č. 10

Zadáno: 6. a 7. 5.

Deadline: 20. a 21. 5.

1. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y)$ na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$

$$f(x, y) = x - 2y + \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + 3\operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

2. Dokažte, že existuje okolí V bodu $(3, -2, 2)$ takové, že množina

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^3 - xz + y = 0\} \cap V$$

je grafem nějaké funkce, která je třídy C^2 na nějakém okolí bodu $(3, -2)$. Spočítejte $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3, -2)$.

Řešení

1. Spočítáme parciální derivace.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x + \frac{3}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + x - 3y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y + \frac{3}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{-2x^2 - 2y^2 + y + 3x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Počátek není v definičním oboru naší funkce a tak položení parciálních derivací rovné nule vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + x - 3y &= 0 \\ -2x^2 - 2y^2 + 3x + y &= 0. \end{aligned}$$

Vynásobení první rovnice dvěma a sečtení s druhou rovnicí vede k $5x - 5y = 0$ a tedy $x = y$. Dosadíme toto do první rovnice a dostaneme

$$2x^2 - 2x = 0$$

a řešení $x = 0$ a $x = 1$. První bod ovšem není v definičním oboru f , takže jediný stacionární bod je $A = (1, 1)$.

Dále potřebujeme druhé derivace vyčíslené v bodě A . Máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{(2x+1)(x^2+y^2) - 2x(x^2+y^2+x-3y)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{(2y-3)(x^2+y^2) - 2y(x^2+y^2+x-3y)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) &= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{(-4y+1)(x^2+y^2) - 2y(-2x^2-2y^2+3x+y)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) &= -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Odtud

$$\mathbb{H}_f(A) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

což je dle Sylvestrova kritéria indefinitní matice - má totiž záporný determinant, takže součin vlastních čísel je záporný a jedno tak musí být kladné a druhé záporné. Funkce f tak nemá v bodě A extrém.

2. Označme $F(x, y, z) = z^3 - xz + y$ a povšimněme si, že jde o spojitou funkci všude. Zároveň v bodě $(3, -2, 2)$ opravdu platí $F(3, -2, 2) = 0$. Aby byly splněny předpoklady věty o implicitní funkci, musíme ukázat, že na okolí bodu $(3, -2, 2)$ je funkce $z \mapsto F(x, y, z)$ ryze monotónní. To se nejlépe ukáže spočítáním parciální derivace F podle z a ukázáním její nenulovosti v studovaném bodě. Máme

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - x, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(3, -2, 2) = 9 \neq 0.$$

Ze spojitosti této parciální derivace plyne ryzí monotonie na okolí studovaného bodu, jsou tak splněny předpoklady věty o implicitní funkci. Navíc můžeme derivovat, kolikrát se nám zlíbí, protože F je třídy C^∞ .

Zderivujeme předpis $F(x, y, z(x, y)) = 0$ podle y

$$3z(x, y)^2 \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) - x \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) + 1 = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{-1}{3z(x, y)^2 - x}$$

a dosazením bodu $(x, y, z) = (3, -2, 2)$ dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial y}(3, -2) = -\frac{1}{9}.$$

Nakonec zderivujeme předpis pro $\partial z / \partial y$ ještě jednou podle y a máme hotovo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{(3z(x, y)^2 - x)^2} \cdot (6z(x, y) \frac{\partial z}{\partial y}(x, y))$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3, -2) = -\frac{4}{243}.$$