Sada příkladů 2/2

Obyčejné diferenciální rovnice

Separované proměnné

Nalezněte obecné řešení nebo řešení Cauchyovy úlohy

1. $y' = \alpha y(P_m - y)$, $y(0) = y_0 \in (0, P_m)$ (regulovaný růst počtu obyvatel)
2. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$
3. $y' = \dfrac{1-x}{y}$
4. $y' = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{2y(1+\mathrm{e}^x)}$
5. $y' = \sqrt{1-y^2}$
6. $y' = \dfrac{y \ln y}{\sin x}$
7. $y' = -\dfrac{2x\sqrt{1-y^2}}{y}$
8. $y' \mathrm{cotg}\, x + y = 2$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$
9. $y' = -\dfrac{x\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-x^2}}$
10. $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{xy}$
11. $y' = \dfrac{2xy^2}{1-x^2}$, $y(0) = 1$.

12. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice
$$y'(2-\mathrm{e}^x) = -3\mathrm{e}^x \mathrm{tg}\, y \cos^2 y$$
procházející bodem $(0, \frac{\pi}{4})$ splňující
a) $y(\ln 3) = 0$ b) $y(\ln 3) = \frac{\pi}{4}$ $y(\ln 3) = \frac{\pi}{2}$.

13. Kterými body prochází právě jedno maximální řešení rovnice $xy' - y = 0$?

14. Meteroid, který se nachází výhradně pod vlivem zemské přitažlivosti, začíná padat k Zemi z klidové polohy ve vzdálenosti h. Nalezněte závislost rychlosti meteroidu na vzdálenosti od povrchu Země. Jakou rychlostí dopadne na zemský povrch, zanedbáme-li vliv zemské atmosféry? Obě úlohy řešte i pro limitní případ $h = \infty$. Poloměr Země je přibližně 6378 km.

15. Najděte křivky, pro které platí, že úsečka, ležící na tečně této křivky s krajními body na souřadných osách, má střed v bodě dotyku. Napište rovnici křivky, která prochází bodem (2,3).

Homogenní rovnice a rovnice, které lze na homogenní převést

Není-li řečeno jinak, nalezněte obecné řešení nebo řešení dané Cauchyovy úlohy

16. $y'(x+y) + x - y = 0$

17. $y' = \dfrac{x+2y}{x}$

18. $y' = \dfrac{y}{x} - \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$

19. $y' = \dfrac{y}{x} \cos \ln \dfrac{y}{x}$

20. $y' = \dfrac{y + \sqrt{xy}}{x}$

21. $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$

22. $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln\frac{y}{x})$, $y(1) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

23. $y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$

24. $y' = \frac{1}{x + y - 2}$

25. $y' = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}$

26. $y' = \frac{y + x}{x + 3} - \ln\frac{y + x}{x + 3}$.

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE (ODR, anglicky ODE)

zatím jedna rovnice prvního řádu ve tvaru $y' = F(x,y)$. Cíl je tedy najít
buď obecné řešení = všechny fce $y(x)$ splňující rovnici nebo
řešení Cauchyovy úlohy = fci $y(x)$ splňující rovnici + počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$
pro nějaké zadané x_0 a y_0.

Peanova věta: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$.
Pak existuje řešení Cauchyovy úlohy na okolí x_0.

Picardova-Lindelöfova věta: Nechť F je navíc na Ω lokálně lipschitzovská
v proměnné y. Pak na okolí x_0 existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy.

Lok. lipsch.: $\forall (\bar{x},\bar{y}) \in \Omega\ \exists K>0\ \exists \delta>0: |F(x,y_1)-F(x,y_2)| \leq K|y_1-y_2|$ kdykoli (x,y_1) a (x,y_2) $\in U_\delta((\bar{x},\bar{y}))$

Lepení řešení: y_1 řeší $y' = F(x,y)$ na intervalu (a,b)
y_2 řeší — " — na intervalu (b,c)
a navíc $\lim_{x \to b_-} y_1(x) = \lim_{x \to b_+} y_2(x) = z$, a F je spojitá v (b,z)

Potom
$$y(x) = \begin{cases} y_1 & \text{pro } x \in (a,b) \\ z & \text{pro } x = b \\ y_2 & \text{pro } x \in (b,c) \end{cases}$$
je řešení $y' = F(x,y)$ na (a,c).

Jak je to s prodlužováním řešení?

1, řešení $y(x)$, které máme, narazilo na hranici oblasti Ω. Nelze prodloužit.

2, řešení $y(x)$ uteče do ∞ pro konečné x. Nelze prodloužit.

3, řešení v koncovém bodě zůstalo uvnitř Ω. Lze z koncového bodu hledat nové řešení a pak obě řešení slepit $\Rightarrow$ Lze prodloužit.

SEPAROVANÉ PROMĚNNÉ: $y' = g(y)f(x)$, tj. $F(x,y) = g(y)f(x)$.

Postup: $\frac{dy}{dx} = g(y)f(x) \to \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \to \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \to G(y) = F(x) + C$
$\to y = G^{-1}(F(x)+C)$

(2)

1) $y' = \alpha y(P_m - y)$, $y(0) = y_0 \in (0, P_m)$

$\frac{dy}{y(P_m-y)} = \alpha\, dx$. Ale pozor. Dělíme, takže předpokládáme $y \neq 0$, $y \neq P_m$.
Ovšem $y \equiv 0$ je očividně řešení a stejně tak $y \equiv P_m$

$$\int \frac{dy}{y(P_m-y)} = \int \alpha\, dx = \alpha x + C \qquad \frac{1}{y(P_m-y)} = \frac{1}{P_m}\cdot\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{P_m-y}\right)$$

$$\frac{1}{P_m}\left(\int \frac{1}{y}\, dy + \int \frac{1}{P_m-y}\, dy\right) = \alpha x + C$$

$\ln|y| - \ln|P_m - y| = P_m \alpha x + C$ (původní $C \in \mathbb{R}$ jsme vynásobili P_m, $P_m C \in \mathbb{R}$ a přejmenovali jsme opět $P_m C$ na C.)

$$\ln\left|\frac{y}{P_m-y}\right| = P_m \alpha x + C$$

$\left|\frac{y}{P_m-y}\right| = e^{P_m\alpha x + C} = e^C \cdot e^{P_m \alpha x} = K \cdot e^{P_m\alpha x}$, $e^C = K > 0$, takže zde je K libovolná kladná konstanta

$\frac{y}{P_m - y} = \pm K e^{P_m \alpha x}$ a označíme $\pm K$ zpět jako C. Zde $C \neq 0$

$y = C P_m e^{P_m\alpha x} - C y e^{P_m \alpha x} \Rightarrow y = \frac{C P_m e^{P_m \alpha x}}{1 + C e^{P_m\alpha x}}$ .... obecné řešení (spolu s $y \equiv 0, y \equiv P_m$)

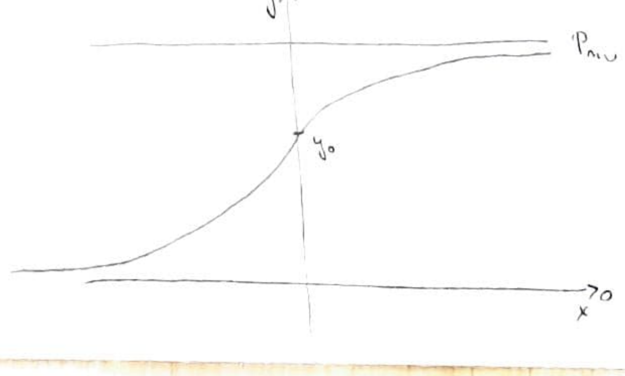
Pro řešení Cauchyovy úlohy potřebujeme najít C tak, aby $y(0) = y_0$. Dosadíme $x=0$.

$y_0 = \frac{C P_m}{1 + C}$ a vyjádříme $C = \frac{y_0}{P_m - y_0}$. Řešení tak je

$$y(x) = \frac{\frac{P_m y_0}{P_m - y_0} \cdot e^{\alpha P_m x}}{1 + \frac{y_0}{P_m - y_0} e^{\alpha P_m x}} = \underline{\underline{\frac{P_m y_0 e^{\alpha P_m x}}{P_m - y_0 + y_0 e^{\alpha P_m x}}}}$$

Všimněme si, že y je rostoucí a $\lim_{x \to +\infty} y(x) = P_m$, $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$

Nikde v průběhu řešení jsme nenarazili na žádný problémový bod x, řešení je tak definované na celém $\mathbb{R}$, ovšem to neplatí pro $C < 0$, neboli pro $y_0 \notin (0, P_m)$.



2) $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ Potřebujeme $y \geq 0, x > 0$ (to tvoří oblast Ω)

[přesněji Ω ~~je~~ má být otevřená oblast, proto $\Omega = \{(x,y), x>0, y>0\}$]

$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ... dělíme $\sqrt{y}$, takže $y \neq 0$. Ovšem vidíme, že $y=0$ je řešení!

$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow 2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + C$, kde $C \in \mathbb{R}$.

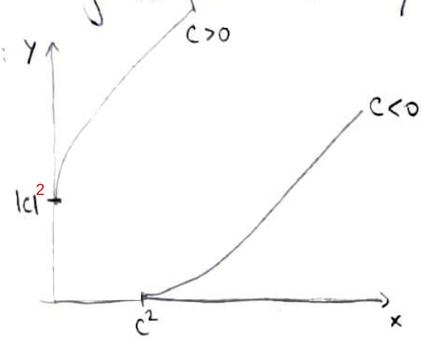
$\sqrt{y} = \sqrt{x} + C$ ... přejmenovali jsme $\frac{C}{2}$ na C, pořád $C \in \mathbb{R}$

$\underline{y = (\sqrt{x}+C)^2}$

Pozor, pro záporná C máme omezení na definiční obor, potřebujeme sqrt(x) + C >= 0, tedy x >= (-C)^2 = C^2
V bodě x = C^2 můžeme lepit ke konstantnímu řešení y = 0 a dostat tak řešení pro x > 0 jako
y = 0 pro x < C^2
y = (sqrt(x)-C)^2 pro x > C^2, C > 0
(zde jsme přejmenovali původní C na -C)

Obecné řešení je tak pro $x > 0$: $y \equiv 0$ a $\uparrow$.

Obrázek:



3) $y' = \frac{1-x}{y}$. Potřebujeme $y \neq 0$. Tentokrát nemáme konstantní řešení.

$\int y\,dy = \int (1-x)\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = x - \frac{x^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$

$y^2 = 2x - x^2 + C$ (opět jsme přejmenovali konstantu, stále $C \in \mathbb{R}$)

$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{-x^2+2x+C}}}$ Zde se dostáváme do potíží s def. oborem řešení. Potřebujeme $-x^2+2x+C \geq 0$!

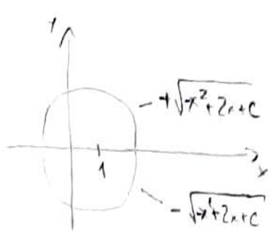
$x^2 - 2x - C \leq 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4C}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+C}$

$\Rightarrow x \in \left(1-\sqrt{1+C}, 1+\sqrt{1+C}\right)$ pro $C > -1$.

Takto to nevypadá hezky, ale uvědomme si, že řešení lze také napsat jako

$y^2 + (x^2 - 2x + 1) = C + 1$, tj. $\boxed{y^2 + (x-1)^2 = C+1}$ a můžeme kreslit



Máme kružnice všech poloměrů (volbou $C > -1$).

Řešení nejdou nijak nalepovat.

4) $y' = -\frac{e^x}{2y(1+e^x)}$. Potřebujeme $y \neq 0$.

$\int 2y\,dy = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \Rightarrow y^2 = -\int \frac{1}{1+t}\,dt = -\ln|1+t| + C = -\ln|1+e^x| + C = \ln\frac{1}{1+e^x} + C$

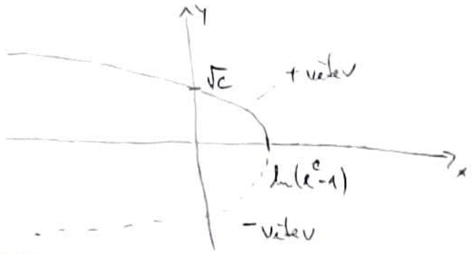
$t = e^x$
$dt = e^x dx$

Odtud $\underline{y = \pm\sqrt{\ln\left(\frac{1}{1+e^x}\right) + C}}$ $C \in \mathbb{R}$

Def. obor řešení: $\ln\left(\frac{1}{1+e^x}\right)+C>0$. Odtud $x<\ln(e^C-1)$ pro $C>0$

pro $C\le 0$ není řešení definováno nikde

Obrázek:



Lepit různá řešení nelze

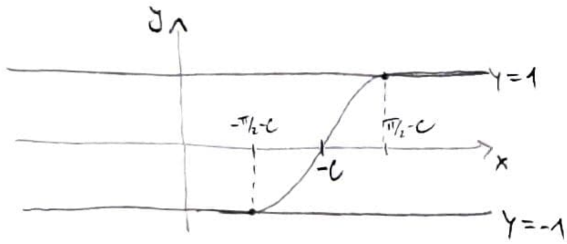
5) $y'=\sqrt{1-y^2}$. Potřebujeme $|y|\le 1$. Zároveň očividně $y=\pm 1$ jsou konstantní řešení.
Dále dělíme, takže předpokládáme $|y|<1$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=x+C \Rightarrow \arcsin y = x+C$$

$$\underline{\underline{y=\sin(x+C)}}$$

toto funguje jen na def. oboru $\arcsin y$, tj. potřebujeme $x+C\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\underline{\underline{x\in\left(-\frac{\pi}{2}-C,\ \frac{\pi}{2}-C\right)}}$$



Oblouk fce $\sin(x+C)$ nalepíme v krajních bodech na konstantní řešení a dostaneme řešení definované pro $x\in\mathbb{R}$.

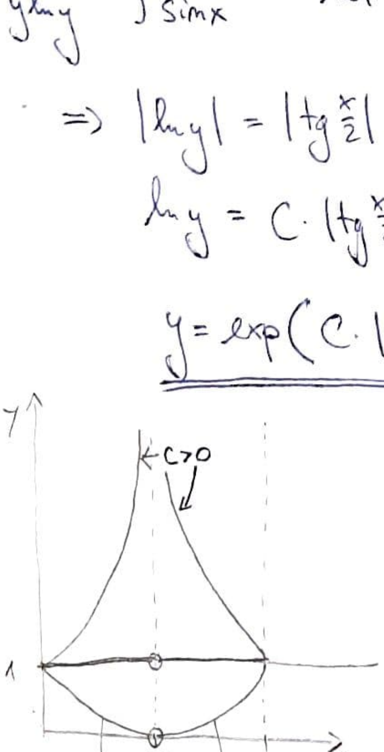
6) $y'=\frac{y\ln y}{\sin x}$ Potřebujeme $y>0$, $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. $y\equiv 1$ je řešení (pořád však definované jen na $(k\pi,(k+1)\pi)$)

$$\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dx}{\sin x} \Rightarrow \ln|\ln y| = \int\frac{dx}{\sin x} \overset{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{=} \int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

$\Rightarrow |\ln y| = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\cdot K$, kde $K=e^C$, $K>0$

$\ln y = C\cdot\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$, $C=\pm K$, $C\neq 0$, ovšem $C=0 \Rightarrow y=1$, což je také řešení.
tedy $C\in\mathbb{R}$

$\underline{\underline{y=\exp\left(C\cdot\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right)}}$ pro $x\in(k\pi,(k+1)\pi)$



7) $y' = -\dfrac{2x\sqrt{1-y^2}}{y}$ $\quad y \neq 0,\ |y| \leq 1,\ y = \pm 1$ jsou konstantní řešení

(5)

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\int 2x\,dx = -x^2 + C$$

$\parallel$ $t = 1-y^2$, $dt = -2y\,dy$

$$-\frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot t^{1/2} = -\sqrt{1-y^2}$$

$\sqrt{1-y^2} = x^2 + C$ (přejmenovali jsme $-C$ na C)

potřebujeme $x^2 + C > 0$, $\quad |x| > \sqrt{-C}$ pro $C < 0$

$1 - y^2 = (x^2+C)^2$

$y^2 = 1 - (x^2+C)^2$.

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{1-(x^2+C)^2}}}$$

$\ldots (x^2+C)^2 < 1$

$-1 < x^2 + C < 1$

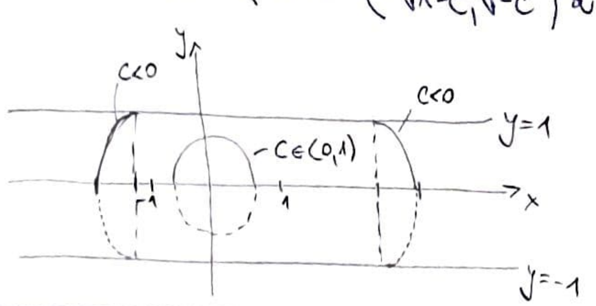
$\underbrace{-1-C < x^2}_{} < 1 - C$

toto je méně omezující než $x^2 > -C$

Očividně $C < 1$, jinak je definiční obor prázdný.

Pro $C \in (0,1)$ máme def. obor $(-\sqrt{1-C}, \sqrt{1-C})$

Pro $C < 0$ máme def. obor $(-\sqrt{1-C}, -\sqrt{-C})$ a $(\sqrt{-C}, \sqrt{1-C})$



---

8) $y'\cotg x + y = 2$ $\quad x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

$y'\cotg x = 2 - y$ $\quad y \equiv 2$ je řešení

$$\int \frac{dy}{2-y} = \int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C \quad \text{pro } x \in (k\pi, k\pi + \tfrac{\pi}{2}) \text{ a } x \in (k\pi + \tfrac{\pi}{2}, (k+1)\pi)$$

$\parallel$

$-\ln|2-y|$

$\ln|2-y| = \ln|\cos x| + C$ (přejmenovali jsme $-C$ na C), $C \in \mathbb{R}$

$|2-y| = K\cdot|\cos x|$ $\quad K > 0$, $K = e^C$

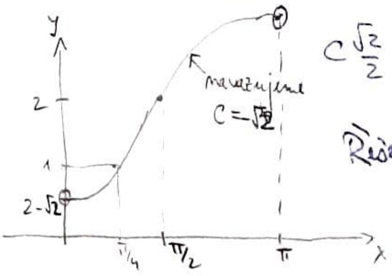
$2 - y = C\cdot|\cos x|$, $C \neq 0$, $C = 0$ je také řešení, $C \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y = 2 - C\cdot|\cos x|}.$$

Hledáme řešení s $y(\frac{\pi}{4}) = 1$, tj. na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. $\quad 1 = 2 - C\cdot|\cos\frac{\pi}{4}| = 2 - C\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$C\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow y = 2 - \sqrt{2}|\cos x|$



Řešení lze rozšířit na $\mathbb{R}$ jako fci $y = 2 - \sqrt{2}\cos x$. $y'\cdot\cotg x$ v bodech $x = k\pi$ dodefinujeme spojitě.

9) $y' = -\frac{x\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x\in(-1,1)$, $y\in[-1,1], y\neq 0$ $\quad y=\pm 1$ jsou konstantní řešení

$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow -\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-x^2}+C$

$\sqrt{1-y^2} = C-\sqrt{1-x^2}$, $C\in\mathbb{R}$, ovšem $C<0$ nic nedá $\Rightarrow C>0$

$1-y^2 = \left(C-\sqrt{1-x^2}\right)^2$

$\underline{y=\pm\sqrt{1-\left(C-\sqrt{1-x^2}\right)^2}}$

Navíc $C-\sqrt{1-x^2}\geq 0$ $\Rightarrow x^2\geq 1-C^2$ to je omezení pro $C\in(0,1)$

potřebujeme $\left(C-\sqrt{1-x^2}\right)^2\leq 1$

$\Rightarrow$ $\underline{C+1\geq\sqrt{1-x^2}\geq C-1}$

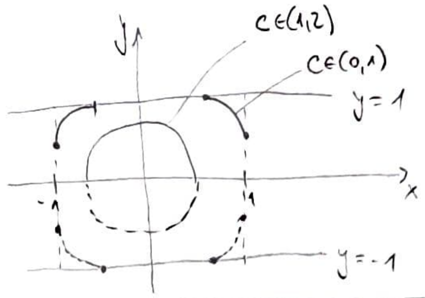
↳ toto je méně restriktivní než

$\Rightarrow C\geq\sqrt{1-x^2}\geq C-1$, $\Rightarrow x^2\in\left(1-C^2, 1-(C-1)^2\right)$. Pro $C>2$ to nemá řešení.

pro $C<1$ to není omezení

$C\in(0,1)$: $|x|\geq\sqrt{1-C^2}$, tj. $x\in(-1,-\sqrt{1-C^2}),(\sqrt{1-C^2},1)$

$C\in(1,2)$: $|x|\leq\sqrt{1-(C-1)^2}$



10) $y'=\frac{\sqrt{y^2+1}}{xy}$ $\quad x\neq 0, y\neq 0$

$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}} = \int\frac{dx}{x} = \ln|x|+C$, $C\in\mathbb{R}$

$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}} = \sqrt{y^2+1}$

$\sqrt{y^2+1}=\ln|x|+C \Rightarrow \ln|x|+C\geq 0$

$\ln|x|\geq -C$

$|x|\geq e^{-C}$

to je spor s tímto

$y^2+1=\left(\ln|x|+C\right)^2$

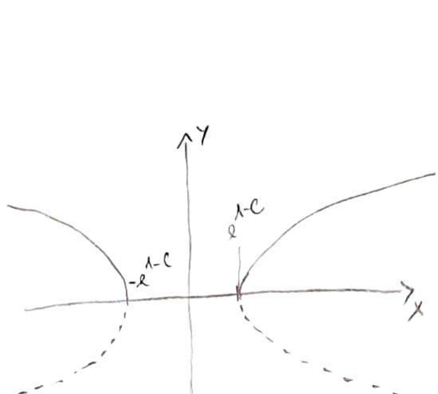
$\underline{y=\pm\sqrt{\left(\ln|x|+C\right)^2-1}}$

$\left(\ln|x|+C\right)^2\geq 1$

$\ln|x|+C\geq 1$ nebo $\ln|x|+C\leq -1$

$\ln|x|\geq 1-C$

$\underline{|x|\geq e^{1-C}}$



11) DÚ

12) $y'\cdot(2-e^x) = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$ $\qquad y \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ (fce ale definovaná)
$y = 0 + k\pi$ je konstantní řešení

7

$$\int \frac{dy}{\operatorname{tg} y \cos^2 y} = -3\int \frac{e^x}{2-e^x}\,dx \underset{t=2-e^x}{=} 3\int \frac{1}{t}\,dt = 3\ln|2-e^x| + C = \ln|2-e^x|^3 + C$$

$\| $

$\ln|\operatorname{tg} y|$

$\Rightarrow \ln|\operatorname{tg} y| = \ln|2-e^x|^3 + C \qquad C\in\mathbb{R}$

$|\operatorname{tg} y| = K|2-e^x|^3 \qquad K>0$

$\operatorname{tg} y = C\cdot|2-e^x|^3 \qquad C\in\mathbb{R}$

$\underline{y = \operatorname{arctg}\left(C\cdot|2-e^x|^3\right) + k\pi}$, $x\in\mathbb{R}$

Obrázek $C>0 \Rightarrow y>0$
$C<0 \Rightarrow y<0$

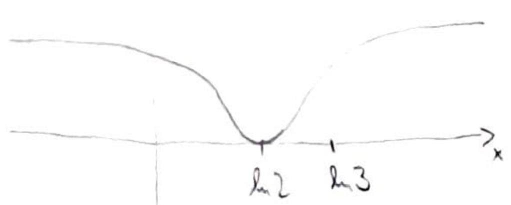
$x=\ln 2 \Rightarrow y=0$

$\lim_{x\to+\infty} y = \pi/2$ pro $C>0$, $-\pi/2$ pro $C<0$

$\lim_{x\to-\infty} y = \operatorname{arctg}(8C)$. Řešení procházející bodem $(0,\pi/4)$: $y(0)=\pi/4$ ... není konstantní řešení

$\pi/4 = \operatorname{arctg}(C) + k\pi \Rightarrow k=0$
a $C=1$

$\Rightarrow$ Na intervalu $(-\infty,\ln 2)$ bude řešení vždy $\underline{y=\operatorname{arctg}(|2-e^x|^3)}$



V bodě $\ln 2$ má fce nulovou derivaci, protože y' obsahuje $3\cdot|2-e^x|^2$, takže lze lepit konstantní řešení a také lze lepit jakékoli jiné řešení s jinou konstantou C!

a) $y(\ln 3)=0$: Nalepíme konstantní řešení. Dostáváme $\underline{y_a(x)} = \begin{cases} \operatorname{arctg}(|2-e^x|^3), & x\le \ln 2 \\ 0, & x\ge \ln 2 \end{cases}$

b) $y(\ln 3)=\pi/4$. Hledáme C_b tak, že $\pi/4 = \operatorname{arctg}\left(C_b\cdot|2-3|^3\right) = \operatorname{arctg} C_b \Rightarrow C_b = 1$

$\underline{y_b(x)} = \operatorname{arctg}(|2-e^x|^3)$, $x\in\mathbb{R}$

c) $y(\ln 3)=\pi/2$. Takové řešení neexistuje, protože $y(x)\in(-\pi/2,\pi/2)$, pokud má platit $y(\ln 2)=0$.

---

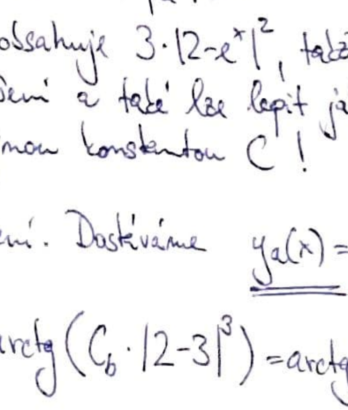
13) $xy'-y=0$ $\qquad y=0$ je očividné řešení

$y' = y/x$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + C$, $C\in\mathbb{R}$

$|y| = K|x|$



Právě jedno řešení prochází všemi body (x,y) t.ž. $x\neq 0$

Bodem $(0,0)$ prochází ∞ mnoho řešení

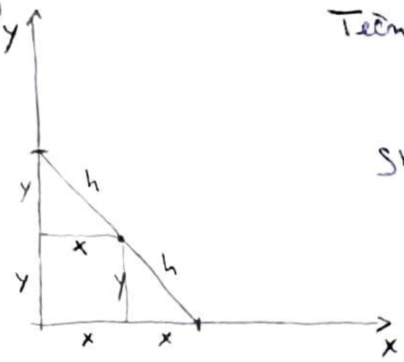
Body $(0,y)$ pro $y\neq 0$ neprochází žádné řešení.

$y = C|x|$ ... v bodě $(0,0)$ nelze lepit ke konstantnímu řešení, ale lze slepit $C|x|$, $x<0$ a $-C|x|$, $x>0$

$\Rightarrow y = Cx$ jsou řešení pro $C\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$

14) Na konci souboru

15)



Tečna v bodě (x,y): rovnice $Y = y'(x)X + q$, kde q splňuje

$$y = y'(x)x + q$$

Střed v bodě dotyku: body $(0,2y)$ a $(2x,0)$ leží na rovnici tečny:

$$2y = q$$
$$0 = y'(x)2x + 2y$$

$\Rightarrow$ Získáváme rovnici $y'\cdot x = -y$

$$\ln|y| = \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} = \ln|x|^{-1} + C$$
$$|y| = \frac{K}{|x|} \Rightarrow y = \frac{C}{|x|}, \quad C\in\mathbb{R}$$

V bodě $(2,3)$: $3 = \frac{C}{2} \Rightarrow C = 6$.

Křivka, kterou hledáme, je $y = \frac{6}{x}$, $x>0$

HOMOGENNÍ ROVNICE $\quad y' = f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$. Postup: nová neznámá $z(x) = \frac{y(x)}{x}$

Pracujeme na $x\in(-\infty,0)$ a $x\in(0,+\infty)$

$$z'(x) = \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\cdot\left(g(z)-z\right)$$

a rce pro $z(x)$ je se separovanými prom.

16) $y'(x+y) = y-x$

$$y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{y/x - 1}{y/x + 1} \Rightarrow z' = \frac{1}{x}\left(\frac{z-1}{z+1} - z\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{-z^2-1}{z+1}\right) = -\frac{1}{x}\left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)$$

Pro $y \neq -x$

$$\int\frac{(z+1)\,dz}{z^2+1} = -\int\frac{1}{x}dx = -\ln|x| + C$$
$$\parallel$$
$$\operatorname{arctg} z + \frac{1}{2}\cdot\cancel{\frac{1}{z^2+1}}\log(1+z^2)$$

$$\operatorname{arctg} z + \frac{1}{2}\log(1+z^2) = -\ln|x| + C$$

$\Rightarrow y(x)$ splňuje $\boxed{\operatorname{arctg}\left(\frac{y(x)}{x}\right) + \log\sqrt{1+\frac{y^2(x)}{x^2}} = C - \ln|x|}$, pro $x\in(-\infty,0)$ a $x\in(0,\infty)$

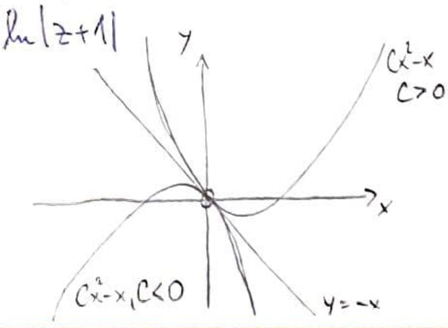
---

17) $y' = 1 + 2\frac{y}{x} \Rightarrow z' = \frac{1}{x}\cdot(1+2z-z) = \frac{z+1}{x}$ ... $z=-1 \Rightarrow y=-x$ je řešení

$$\int\frac{dz}{z+1} = \int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$
$$\parallel$$
$$\ln|z+1|$$

$$|z+1| = K\cdot|x|$$
$$z+1 = C\cdot|x|$$
$$z = C|x| - 1$$

$y = x\cdot(C|x|-1)$, lze napsat i jako $y = Cx^2 - x$ pro $x\in(-\infty,0)$ a $x\in(0,\infty)$



Řešení lze nalepovat v počátku a získat tak řešení na $\mathbb{R}$, pokud y, y' a y/x dodefinujeme spojitě

18) $y' = \frac{y}{x} - e^{y/x} \Rightarrow z' = \frac{1}{x}\left(z - e^{z} - z\right) = -\frac{e^{z}}{x}$

$$\int \frac{dz}{e^{z}} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + C = \ln\frac{1}{|x|} + C$$

$\| \quad -e^{-z}$

$-e^{-z} = \ln\frac{1}{|x|} + C$

$e^{-z} = \ln|x| + C$

$-z = \ln\left(\ln|x| + C\right)$

$y = -x \cdot \ln\left(\ln|x| + C\right)$

Potřebujeme $\ln|x| + C > 0$

$\ln|x| > -C$

$|x| > e^{-C}$, tj. na intervalech $(-\infty, -e^{-C})$ a $(e^{-C}, +\infty)$

---

19) DÚ

---

20) $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}} \Rightarrow z' = \frac{1}{x}\left(z + \sqrt{z} - z\right) = \pm\frac{\sqrt{z}}{x}$ $\quad z = 0$, tj. $y = 0$ je řešení

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \pm\int \frac{dx}{x} = \pm\ln|x| + C$$

$\| \quad 2\sqrt{z}$

$\sqrt{z} = \ln\sqrt{|x|}^{\pm 1} + C$

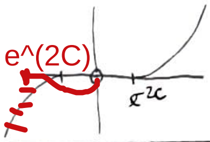
$y = x\cdot\left(\ln\sqrt{|x|}^{\pm 1} + C\right)^2$ ale jen pro $\ln\sqrt{|x|} + C > 0$

$\frac{1}{2}\ln|x| > -C$

$\ln|x| > -2C$

$\boxed{|x| > e^{-2C}}$

Lze nalepovat v krajních bodech na $y = 0$



---

21) $y' = y/x - \frac{x}{y} \Rightarrow z' = \frac{1}{x}\left(z - \frac{1}{z} - z\right) = -\frac{1}{xz}$

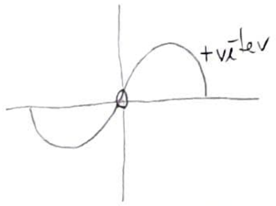
$$\frac{z^2}{2} = \int z\,dz = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + C \Rightarrow z^2 = -2\ln|x| + C$$

$= C + \ln\frac{1}{x^2}$ a potřebujeme $C + \ln\frac{1}{x^2} \geq 0$

$\frac{1}{x^2} > e^{-C}$

$x^2 < e^{C}$

$|x| < e^{C/2}$



$y = \pm x \cdot \sqrt{C + \ln\frac{1}{x^2}}$

na $(-e^{C/2}, 0)$ a $(0, e^{C/2})$ $\quad (y'(0) = \infty)$

---

22) $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right) \Rightarrow z' = \frac{1}{x}\left(z + z\ln z - z\right) = \frac{z\ln z}{x}$ $\quad z > 0$ $\quad z = 1$ je řešení (tj. $y = x$)

$$\int \frac{dz}{z\ln z} = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$\| \quad \ln|\ln z|$

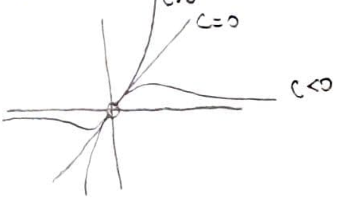
$\ln|\ln z| = \ln|x| + C$

$|\ln z| = K\cdot|x|$

$\ln z = Cx$ $\quad C \in \mathbb{R}$

$z = e^{Cx} \Rightarrow y = xe^{Cx}$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$

$y(1) = e^{-1/2}$: $e^{-1/2} = e^{C} \Rightarrow C = -1/2$



Hledané řešení je $y = xe^{-\frac{1}{2}x}$ na $(0, \infty)$

ROVNICE, KTERÉ LZE PŘEVÉST NA HOMOGENNÍ

$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ a $a\beta \neq b\alpha \Rightarrow$ řešíme soustavu $\left.\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ řešení (x_0, y_0)

Nová proměnná $\xi = x - x_0$ a nová neznámá $\eta = y - y_0$, tj. $\eta(\xi) = y(\xi + x_0) - y_0$

Je-li $a\beta = b\alpha$, pak pomůže buď $z(x) = \frac{ax+by+c}{\gamma}$ nebo $z(x) = \alpha x + \beta y + \gamma$

23) $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$

$$\begin{array}{l} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \\ \hline 2x-2=0 \Rightarrow x_0=1 \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow \xi = x-1,\ \eta(\xi) = y(\xi+1)-2 \end{array}$$

$! \eta'(\xi) = y'(x) !$

$$\left.\begin{array}{l} x-y+1 = (x-1)-(y-2) = \xi - \eta \\ x+y-3 = (x-1)+(y-2) = \xi+\eta \end{array}\right\} \eta' = \frac{\xi-\eta}{\xi+\eta} = \frac{1-\eta/\xi}{1+\eta/\xi}. \quad z = \eta/\xi$$

$z' = \frac{1}{\xi}\cdot\left(\frac{1-z}{1+z} - z\right) = \frac{1}{\xi}\cdot\left(\frac{1-2z-z^2}{1+z}\right) = -\frac{1}{\xi}\,\frac{z^2+2z-1}{z+1}$, $z \neq -1$, $z = -1 \pm \sqrt{2}$ jsou řešení

$$\int \frac{(z+1)\,dz}{z^2+2z-1} = -\int \frac{1}{\xi}\,d\xi = -\ln|\xi| + C = \ln|\xi|^{-1} + C$$

$$\int \frac{(z+1)\,dz}{z^2+2z-1} = \frac{1}{2}\ln|z^2+2z-1|$$

$\ln|z^2+2z-1| = \ln|\xi|^{-2} + C$, $C \in \mathbb{R}$

$$z^2+2z-1 = \frac{C}{|\xi|^2}$$

$$(z+1)^2 - 2 = \frac{C}{|\xi|^2}$$

$$(z+1)^2 = 2 + \frac{C}{|\xi|^2} \Rightarrow z+1 = \pm\sqrt{2+\frac{C}{|\xi|^2}}$$

$$\Rightarrow z = -1 \pm \sqrt{2 + \frac{C}{|\xi|^2}}$$

$$\eta = -\xi \pm \sqrt{2\xi^2 + C}$$

$y = 2-(x-1) \pm \sqrt{2(x-1)^2+C} = \underline{3 - x \pm \sqrt{2(x-1)^2+C}}$ pro $x \in (-\infty, 1)$ a $x \in (1, +\infty)$

ale volba C omezuje definiční obor. $C \geq 0$ je v pořádku, $C < 0$: $2(x-1)^2 + C > 0$

$$(x-1)^2 > -\frac{C}{2}$$

$$|x-1| > \sqrt{-\frac{C}{2}},$$

tedy pro $C<0$ máme $x \in \left(-\infty, 1-\sqrt{\frac{-C}{2}}\right)$ a $x \in \left(1+\sqrt{\frac{-C}{2}}, +\infty\right)$

---

24) $y' = \frac{1}{x+y-2}$. $\left.\begin{array}{l} z(x) = x + y(x) - 2 \\ z'(x) = 1 + y' \end{array}\right\}$ $z' - 1 = \frac{1}{z} \Rightarrow z' = 1 + \frac{1}{z} = \frac{z+1}{z}$, $z \neq 0$, $z = -1$ je řeš.

$z \neq 0 \Rightarrow y \neq 2-x$

$z = -1 \Rightarrow y = 1-x$ je řešení

$$\int \frac{z\,dz}{z+1} = \int 1\,dx = x + C$$

$$z - \ln|z+1| = x + C \Rightarrow \ln\frac{e^z}{|z+1|} = x + C \Rightarrow \frac{e^z}{|z+1|} = Ke^x \Rightarrow \frac{e^z}{z+1} = Ce^x$$

$$\frac{e^{x-2+y(x)}}{x-1+y(x)} = C \cdot e^{x} \text{ ... Nelze elementárně invertovat} \to \frac{e^{y(x)}}{x-1+y(x)} = C$$

$\frac{e^z}{z+1}$ je prostá na $(0,+\infty)$ a nabývá hodnot $[1,\infty)$
je prostá na $(-\infty,-1)$ a nabývá hodnot $(-\infty,0)$
je prostá na $(-1,0)$ a nabývá hodnot $[1,\infty)$
} zde můžeme invertovat.

---

25) $y' = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{4x+2y-3}\right)$ $z(x) = 4x+2y-3$, $z'(x) = 4+2y'$

$2y' = 1+\frac{5}{4x+2y-3}$

$z' = 5+\frac{5}{z} = 5\frac{z+1}{z}$ $z \neq 0$, $z=-1$ je řešení, tj. $4x+2y-3=-1$, $y = 1-2x$

$\int \frac{z\,dz}{z+1} = 5\int 1\,dx = 5x+C$

$\parallel$

$z - \ln|z+1|$

$\ln\frac{e^z}{|z+1|} = 5x+C \Rightarrow \frac{e^z}{|z+1|} = K \cdot e^{5x} \Rightarrow \frac{e^z}{z+1} = C \cdot e^{5x}$

$\frac{e^{4x+2y-3}}{4x+2y-2} = C \cdot e^{5x}$

$e^{2y-3} = Ce^{x} \cdot (4x+2y-2)$

$\Rightarrow e^{2y} = C \cdot e^{x}(4x+2y-2)$

Nelze invertovat elementárně

---

26) $y' = \frac{y+x}{x+3} - \ln\left(\frac{y+x}{x+3}\right)$ $x_0=-3$, $y_0=3$ $\xi = x+3$ $\eta(\xi) = y(\xi-3)-3$

$\eta' = \frac{\eta+\xi}{\xi} - \ln\left(\frac{\eta+\xi}{\xi}\right) = \frac{\eta}{\xi}+1-\ln\left(\frac{\eta}{\xi}+1\right)$ $z(\xi) = \frac{\eta}{\xi}$

$z' = \frac{1}{\xi}\left(z+1-\ln(z+1)-z\right) = \frac{1}{\xi}\cdot\left(1-\ln(z+1)\right)$ $z = e-1$ je řešení

$\int \frac{dz}{1-\ln(z+1)} = \int \frac{d\xi}{\xi} = \ln|\xi|+C$

↳ Nemá elementární integrál!

$E(z) = \ln|\xi|+C$

$z = E^{-1}(\ln|\xi|+C)$ tam, kde lze $E(z)$ invertovat

$\eta = \xi E^{-1}(\ln|\xi|+C)$

$\underline{y = 3+(x+3)E^{-1}(\ln|x+3|+C)}$

(14) Opět s rezervou, nejsem fyzik :o) (12)

$v(x) = ?$ $\quad v(R+h) = 0$, případně $\lim_{x \to +\infty} v(x) = 0$

gravitační zrychlení závisí na x : $g(x) = \frac{G \cdot M}{x^2}$ M… hmotnost Země
G… gravit. konstanta

Odtud tedy $dv = \frac{GM}{x^2} dt$

Navíc $dx = -v(x)\, dt$ (x klesá s kladnou rychlostí, proto −)

Proto $dv = -\frac{GM}{x^2 v(x)} dx$

$$\frac{v^2}{2} = \int v\, dv = -\int \frac{GM}{x^2} dx = \frac{GM}{x} + C$$

$$v^2 = \frac{2GM}{x} + C \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{x} + C}$$

Poč. podmínka $v(R+h) = 0$: $0 = \sqrt{\frac{2GM}{R+h} + C} \Rightarrow C = -\frac{2GM}{R+h}$

Poč. podmínka $\lim_{x \to +\infty} v(x) = 0 \Rightarrow C = 0$

Zajímá nás $v(R)$, což je v případě konečného h : $\boxed{v(R) = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)}}$

a v případě nekonečna : $\boxed{v(R) = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$