Sada příkladů 2/6

Číselné řady

Číselné řady s obecnými členy

Použitím kritérií pro konvergenci řad rozhodněte o konvergenci (absolutní i neabsolutní, je-li to možné) či divergenci následujících řad. Pokud řada obsahuje parametry, proveďte vzhledem k nim diskusi

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{4^n}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$
5. $$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}, \quad x \in \mathbb{R}$$
6. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$
7. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n}$$
8. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + \frac{1}{n})^{n^2} \frac{1}{\mathrm{e}^n}$$
9. $$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}), \quad k \in \mathbb{R}$$

10.
$$\sum_{n=10}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln\ln\ln n}$$

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^{100}}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$$

12.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\ln\ln n}$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$$

14.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}$$

15.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p},\quad p\in\mathbb{R}$$

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p},\quad p\in\mathbb{R},\ 0<x<\pi$$

18.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}},\quad p\in\mathbb{R}$$

19.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\sin\frac{n\pi}{4}+n^p},\quad p\in\mathbb{R}$$

20.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\Big)^p,\quad p\in\mathbb{R}.$$

ŘADY S OBECNÝMI ČLENY

Leibnizovo kritérium: $\{a_k\}$ je nerostoucí. Pak $\sum_{1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konv. $\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Absolutní konvergence: $\sum a_k$ konv. absolutně, pokud $\sum |a_k|$ konv.

$\sum a_k$ konv. neabsolutně, pokud $\sum a_k$ konv. a $\sum |a_k|$ nekonv.

Příklad: $\sum (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ konv. neabsolutně

Dirichletovo kritérium: $\{a_k\}$ monotónní, $a_k \to 0$. $\{b_k\}$ má omezené část. součty.
Pak $\sum a_k b_k$ konv.

Abelovo kritérium: $\{a_k\}$ monotónní, omezená. $\sum b_k$ konverguje. Pak $\sum a_k b_k$ konv.

Posloupnosti $\{\sin(an)\}$ a $\{\cos(an)$ pro $a \neq 2k\pi\}$ mají omezené částečné součty.
Součtovými vzorci lze zkoumat řady typu $\{\sin^2 n\}$ $\{\sin^3 n\}$, $\{(-1)^n \cos^3 n\}$ a pod.

---

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ Vidíme, že $|\sin nx| \le 1$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Proto $|a_n| \le \frac{1}{2^n}$ a dle srovnávacího kritéria řada konverguje absolutně.

---

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{1}{4^n}$. Vidíme, že $|a_n| = \frac{1}{4^n}$, takže řada konverguje absolutně

---

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ Máme $|a_n| = \frac{1}{n}$, tedy řada nemůže konvergovat absolutně.

Má řada $\sum (-1)^{[\sqrt{n}]}$ omezené částečné součty? Znaménka se mění v bodech $n = k^2$. V bodech k^2-1 jsou částečné součty $-3, 2, -5, 4, -7, \dots$ a vidíme, že omezené částečné součty nejsou. Přesto však řada může konvergovat!

Seskupíme členy se stejným znaménkem a vytvoříme novou řadu

$$\sum_{N=1}^{\infty} (-1)^N \cdot \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{N^2+k-1}$$

Označme $b_N = \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{N^2+k-1}$. Platí $\frac{2N+1}{(N+1)^2} \le b_N \le \frac{2N+1}{N^2}$ a podle věty o dvou policajtech $b_N \to 0$. Dle Leibnize řada $\sum (-1)^N b_N$ konverguje.

Na Leibnize potřebujeme ještě monotonii, ale ta plyne z následující série nerovností

$$b_N \ge \frac{2N+1}{N^2+N} \ge \frac{2N+3}{(N+1)^2} \ge b_{N+1}$$

, kde v první nerovnosti využíváme $\frac{1}{A} + \frac{1}{A+2k} \ge \frac{2}{A+k}$

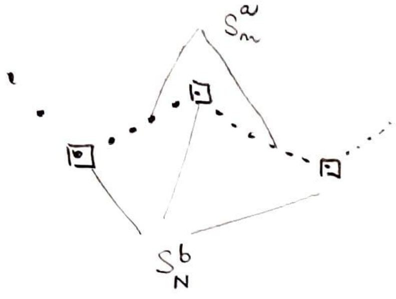
Vidíme, že posloupnost částečných součtů $\{s^b_N\}$ řady $\sum (-1)^N b_N$ má limitu S. ②

Tvrdíme, že posloupnost částečných součtů $\{s^a_n\}$ řady $\sum a_n$ musí mít stejnou limitu S.

Víme, že $s^a_{(N+1)^2-1} = s^b_N$ a pro libovolné n najdeme nejbližší nižší druhou mocninu $k^2 \le n$ a označíme $N = k$.

Potom $s^a_n \in [s^b_N, s^b_{N+1}]$ (případně $s^a_n \in [s^b_{N+1}, s^b_N]$, pokud je pořadí opačné).

Viz obrázek:



Z definice limity snadno vidíme, že pokud $\forall N \ge N_0$ platí $|s^b_N - S| < \varepsilon$, pak jistě $\forall n \ge N_0^2$ platí $|s^a_n - S| < \varepsilon$.

Řada konverguje, neabsolutně.

---

4) $\sum a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$ Očividně $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ a řada nemůže konvergovat absolutně

Vidíme, že $a_n = b_n \cdot c_n$, kde $c_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \{1,1,1,-1,-1,-1,1,1,1,-1,\dots\}$.

Očividně $\{b_n\}$ má omezené částečné součty, protože vždy je $\sum_{n=1}^{N} b_n \in \{0,1,2,3\}$.

$\{c_n\}$ jde monotónně k nule, takže dle Dirichletova kriteria řada konverguje neabsolutně.

---

5) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ $\quad |a_n|$ je pro dost. velké n rovno $2^n \sin \frac{|x|}{3^n}$, kde $\frac{|x|}{3^n} \le \pi/2$

To je řada s nezápornými členy. Srovnávacím kriteriem: $|a_n| \le 2^n \cdot \frac{|x|}{3^n} = |x| \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Řada $\sum |x| \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Řada $\sum a_n$ konverguje absolutně $\forall x \in \mathbb{R}$.

---

6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ Nelze přímo použít Leibnize či Dirichleta, protože je porušena monotonie díky $(-1)^n$ ve jmenovateli. Naopak lehce dokážeme, že řada diverguje

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \cdot \frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}.$$ Odtud $a_n - \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} = -\frac{1}{n-1}$

Řada $\sum \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ konverguje dle Leibnize, monotonie tu je zřejmá (kdo nevěří, nechť vyšetří průběh $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$) a pokud by $\sum a_n$ konvergovala, pak $\sum \frac{1}{n-1}$ též konv.

O této řadě však víme, že diverguje, proto $\sum a_n$ musí také divergovat.

7) Podobně jako v 6)

$\sum (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$ nelze použít přímo Leibnize kvůli monotonii.

Naopak $a_n = 2 \cdot \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}$. $\sum 2 \cdot \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje.

Pokud by $\sum a_n$ konv., pak $\sum a_n - 2 \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ by konvergovala. To je spor.

Řada $\sum a_n$ diverguje

---

8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$. Výrazy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ a e^n vypadají dost podobně.

Vzniká podezření, že může být porušena nutná podmínka konvergence.

Podívejme se na $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot e^{-n} = \exp \lim_{n\to\infty} \left[n^2 \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\right]$

Použijeme Taylora: $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, proto $\lim \left[n^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - n\right] =$

$= \lim \left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) = -\frac{1}{2}$

a tedy $a_n \not\to 0$, protože $|a_n| \to e^{-1/2}$.

Řada nekonverguje, není splněna nutná podmínka

---

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$. $k=0$ očividně konverguje. Dál řešíme $k \neq 0$

Vidíme, že "$a_n \to \sin \pi n$", hodí se nám to posunout do nuly, kde sinus známe lépe.

$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right) = \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right) + \pi n\right) = \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right)\right)\cos \pi n = (-1)^n \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right)\right)$

Navic $\sqrt{n^2+k^2} - n = \left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+k^2}+n}{\sqrt{n^2+k^2}+n} = \frac{k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n} \searrow 0$ monotónně!

Proto také $\sin\left(\pi \frac{k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}\right) \searrow 0$ monotónně (alespoň od dost velkého n)

Dle Leibnize řada konverguje $\forall k \in \mathbb{R}$.

Absolutní konvergence: $|a_n| = \sin \frac{k^2\pi}{\sqrt{n^2+k^2}+n} \geq \frac{2k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}$ (protože $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$)

a $\frac{2k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n} \sim \frac{k^2}{n}$, což diverguje pro $k \neq 0$.

Řada konverguje absolutně jen pro $k=0$, pro $k \neq 0$ konverguje neabsolutně.

---

10) DÚ

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{100}}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$

Víme: $\{\sin \frac{n\pi}{4}\}$ má omezené částečné součty a $\frac{(\ln n)^{100}}{n} \searrow 0 \Rightarrow$ dle Dirichleta konverguje

Absolutní konvergence: $\{\sin \frac{n\pi}{4}\} = \{\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dots\}$

Pokud by $\sum |a_n|$ konvergovala, musí konvergovat i $\sum |a_{2k+1}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln(2k+1))^{100}}{2k+1}$.

To ale očividně diverguje (např. integrálním nebo srovnávacím s $\{\frac{1}{2k}\}$).

Řada proto konverguje neabsolutně.

---

12) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\ln\ln n}$ Máme $\sin(n+\frac{1}{n}) = \sin n \cos\frac{1}{n} + \cos n \sin\frac{1}{n}$

Proto $a_n = \cos\frac{1}{n} \sin n \frac{1}{\ln\ln n} + \cos n \sin\frac{1}{n} \frac{1}{\ln\ln n}$

Posloupnosti $\{\sin n\}$ a $\{\cos n\}$ mají omezené části. součty, nic lepšího nesplňují

$\cos\frac{1}{n} \to \cos 0 = 1$, takže je rostoucí, $\frac{1}{\ln\ln n}$ je klesající, musíme vyšetřit monotonii:

$$f(x) = \cos\frac{1}{x} \cdot (\ln\ln x)^{-1}$$
$$f'(x) = -\sin\frac{1}{x}\left(-x^{-2}\right)\cdot(\ln\ln x)^{-1} + \cos\frac{1}{x}\cdot(-1)(\ln\ln x)^{-2}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$
$$= \underbrace{\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2\ln\ln x}}_{\sim \frac{1}{x^3\ln\ln x}} - \underbrace{\cos\frac{1}{x}\,\frac{1}{x\ln x\ln\ln^2 x}}_{\sim \frac{1}{x\ln x\ln\ln^2 x}}$$

Toto je zbytečně složité, stačilo použít Abela, cos(1/n) je omezená a monotónní a zbytek konverguje podle Dirichleta jednoduše.

Pro velká x je $f'(x)$ a $f(x)$ klesající

$\Rightarrow \{\sin n\}$ omez. č. součty, $\cos\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\ln\ln n} \searrow 0 \Rightarrow$ dle Dirichleta konv.

$\{\cos n\}$ omez. č. součty, $\sin\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\ln\ln n} \searrow 0 \Rightarrow$ dle Dirichleta konv.

$\Rightarrow \sum a_n$ konverguje

Absolutní konvergence: $\cos\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}$, $\sin n \not\to 0$, $\frac{1}{\ln\ln n}$ nestačí ke konvergenci řady

$\Rightarrow$ Konverguje neabsolutně

---

13) $\sum (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \sum (-1)^n \frac{1-\cos 2n}{n}$. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje

$(-1)^n = \cos n\pi \Rightarrow (-1)^n \cos 2n = \cos\pi n \cos 2n = \cos\pi n\cos 2n - \sin\pi n \sin 2n = \cos(n(\pi+2))$

$\sum -\frac{\cos(n(\pi+2))}{n}$ konverguje dle Dirichleta.

Absolutní konvergence neplatí, $\sum\frac{1}{n}$ ani $\sum\frac{|\cos(n(\pi+2))|}{n}$ nekonvergují $\Big\}$ Konverguje neabsolutně.

15, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$

Řada $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ konverguje dle Leibnize zřejmě
$\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} = \left\{1 - \frac{2}{n+1}\right\}$ je monotónní a omezená
$\Bigg\}$ $\sum a_n$ konverguje dle Abela

$\sum |a_n| = \sum \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ diverguje srovnáním s $\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$

Řada konverguje neabsolutně

16, $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$. To už známe: $p > 1 \Rightarrow$ konverguje absolutně (integrální krit.)
$p \in (0,1] \Rightarrow$ konverguje neabsolutně (Leibniz + integr.)
$p \leq 0 \Rightarrow$ nekonverguje (nutná podmínka)

17, $\sum \frac{\sin nx}{n^p}$ Také známe: $p > 1 \Rightarrow$ konverguje absolutně (srovnání s $\sum \frac{1}{n^p}$)
$p \leq 0 \Rightarrow$ nekonverguje (nutná podmínka)
$p \in (0,1] \Rightarrow$ konverguje (Dirichlet)

Absolutní konvergence neplatí: $\frac{|\sin nx|}{n^p} \geq \frac{\sin^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2} \frac{(1-\cos 2nx)}{n^p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2nx}{n^p}$

a víme, že řada $\sum \frac{1}{2} \frac{\cos 2nx}{n^p}$ konverguje (Dirichlet), $\sum \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^p}$ diverguje $\Rightarrow \sum \frac{\sin^2 nx}{n^p}$ diverguje
$\Rightarrow \sum \frac{|\sin nx|}{n^p}$ diverguje. $p \in (0,1] \Rightarrow$ konverguje neabsolutně

18, $\sum (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^{p+1/n}} = \sum (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{n^p}$: $p \leq 0 \Rightarrow$ nekonverguje (nutná podmínka)
$p > 1 \Rightarrow$ konverguje absolutně $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq 1\right)$

$p \in (0,1]$: Konverguje: $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ konv. (Leibniz) + $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ omez. monotónní (od $n=3$) $\Rightarrow$ Abel.

Konverguje neabsolutně $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{2}\right)$

19, $\sum \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{\sin \frac{n\pi}{4} + n^p}$ $p \leq 0 \Rightarrow$ nekonverguje (nutná podmínka)
$p > 1 \Rightarrow$ konverguje absolutně: $|a_n| \leq \frac{1}{n^p - 1}$

$p \in (0,1]$: Nelze použít Dirichlet přímo, $\left(\sin \frac{n\pi}{4} + n^p\right)$ nemusí být monotónní!

Trik: $a_n = a_n \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{4} - n^p}{\sin \frac{n\pi}{4} - n^p} = \underbrace{\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{\sin^2 \frac{n\pi}{4} - n^{2p}}}_{b_n} - \underbrace{\frac{\sin \frac{n\pi}{4} \cdot n^p}{\sin^2 \frac{n\pi}{4} - n^{2p}}}_{c_n}$. Prozkoumáme $\sum b_n$ a $\sum c_n$ zvlášť

(6)

$\sum b_n$: $\left\{\sin^2 \frac{n\pi}{4}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, \dots\right\}$. Nabývá jen tří různých hodnot.

Můžeme proto napsat $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-(4k-2)^{2p}} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-(2l-1)^{2p}}$

Obě řady na pravé straně konvergují právě tehdy, když $2p > 1$, tj. $p > \frac{1}{2}$.
$\sum b_n$ je řada, která nemění znaménka, takže $\sum b_n$ nemůže konvergovat, pokud obě řady na PS divergují. $\sum b_n$ konverguje $\iff p > 1/2$. (dokonce absolutně)

$\sum c_n$: $\left\{\sin \frac{n\pi}{4}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots\right\}$ Nabývá pěti různých hodnot a pěkně střídá znaménka.

Napišeme $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(4k-2)^p}{1-(4k-2)^{2p}} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{(4l-1)^p}{\frac{1}{2}-(4l-1)^{2p}} + \frac{(4l-3)^p}{\frac{1}{2}-(4l-3)^{2p}}\right]$

Tím jsme se zbavili problému s monotonií, protože $f(x) = \frac{x^p}{1-x^{2p}}$ i $g(x) = \frac{x^p}{\frac{1}{2}-x^{2p}}$ jsou monotonní pro velká x, jdou k nule pro $p>0$, tedy všechny řady na PS konvergují dle Leibnize a $\sum c_n$ konverguje pro $p > 0$. Absolutně jen pro $p > 1$.

Závěr tak je, že $\sum a_n$ konverguje neabsolutně pro $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ a nekonverguje pro $p \in (0, \frac{1}{2}]$.

[sporem, $\sum a_n$ nemůže konvergovat, pokud je součtem konvergující a divergující řady].

---

20) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}\right)^p}_{b_n}$ Očividně $p \le 0$ nekonverguje, protože $|a_n| \not\to 0$. Dále tedy nechť $p > 0$.

Očividně $\{b_n\}$ je monotónní, $b_{n+1} = b_n \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p \le b_n$. Pro Leibnize tak stačí zjistit, kdy $b_n \to 0$. Zároveň pokud $b_n \not\to 0$, je porušena nutná podmínka a řada diverguje (přesněji nekonverguje).

Dále prozkoumáme chování $b_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

Pro libovolné $k > 0$ platí $(2k-1)(2k+1) < (2k)^2$

Dosadíme postupně $k = 1, 2, \dots, n$ a vynásobíme : $1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2 \cdot (2n+1) < 2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n)^2$

$\Rightarrow b_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

A proto $b_n \to 0$ a řada konverguje pro lib. $p > 0$.

Stejný odhad použijeme pro určení, že řada konverguje absolutně pro $p > 2$ dle srovnávacího kritéria.

Pro $p \in (0, 2]$ použijeme opačný odhad : $b_n = \frac{\sqrt{(2^2-1) \cdot (4^2-1) \cdot (6^2-1) \cdot \dots \cdot ((2n)^2-1)}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$= \underbrace{\sqrt{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)}}_{c_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Máme $c_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right) \ge \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)(\dots)\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{1 \cdot (2n+1)}{2 \cdot (2n)} \ge \frac{1}{2}$. Proto $b_n \ge \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2n+1}}$

$\sum |a_n| \geq \sum \left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2n+1}} \right)^p$, což diverguje pro $p \in (0,2]$.

Závěr: Řada konverguje neabsolutně pro $p \in (0,2]$, absolutně pro $p > 2$ a nekonverguje pro $p \leq 0$.