Sada příkladů 2/9

Metrické prostory

Stefan Banach a jedna z jeho vět

1. Metodou postupných aproximací nalezněte řešení rovnice $y' = ay$, $y(0) = \kappa$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

2. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice $2x + \sin x = 1$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

3. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice

$$y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 s y(s)\,\mathrm{d}s + x.$$

Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje. Srovnejte toto řešení s přesných řešením, které lze hledat ve tvaru $y(x) = \alpha x^2 + x$.

4. Dokažte: pro každé $0 \le a \le 1$ konverguje posloupnost

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a), \quad x_0 = 0$$

k hodnotě $\sqrt{a}$ (iterační metoda výpočtu odmocniny).

Funkce více proměnných

Limita a spojitost funkcí více proměnných

Spočtěte následující limity

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

6. $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

7. $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin xy}{x}$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

11. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

platí

$$\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} f(x,y)) = \lim_{y\to0}(\lim_{x\to0} f(x,y)) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

neexistuje.

12. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

limity

$$\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} f(x,y)) \text{ a } \lim_{y\to0}(\lim_{x\to0} f(x,y))$$

neexistují, ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\, x.y\neq0} f(x,y) = 0.$$

① Řešíme rovnici $\begin{array}{l} y' = ay \\ y(0) = k \end{array}$. Zvolíme $y_0 = k$ … konstantní fci splňující počáteční podmínku.

Další členy aproximativní posloupnosti budeme definovat tak aby $y_{n+1}' = a y_n$ a $y_{n+1}(0) = k$.

Tedy $y_{n+1}(x) = a\int_0^x y_n(t)\,dt + k$ (primitivní fce splňující poč. podm.)

Zobrazení pro Banachovu větu je tak $T : y \longmapsto a\int_0^x y(t)\,dt + k$.

Uvažujme toto zobrazení na nějakém prostoru spojitých fcí. Uvidíme, že $C(\mathbb{R})$ nebude ideální a budeme potřebovat kratší interval. Je T kontrakce?

Chceme dostat $\|Ty - Tz\| \leq \alpha \|y - z\|$, kde $\|f\| = \sup_{x\in I} |f(x)|$
$\alpha < 1$.

a I je interval, který určíme později.

Odtud $\|Ty - Tz\| = \sup_{x\in I} \left| a\int_0^x y(t)\,dt + k - a\int_0^x z(t)\,dt - k \right| = \sup_{x\in I} |a| \cdot \left| \int_0^x y(t) - z(t)\,dt \right|$

$= |a| \cdot \sup_{x\in I} \left| \int_0^x y(t) - z(t)\,dt \right| \leq |a| \cdot \sup_{x\in I} \int_0^x |y(t) - z(t)|\,dt \leq |a| \cdot \sup_{t\in(-X,X)} |y - z| \cdot X$,

kde nyní volíme zkoumaný interval $I = (-X, X)$. Nakonec … $\leq |a| \cdot X \cdot \|y - z\|$.

Abychom dostali kontrakci, potřebujeme $|a| \cdot X < 1$, což umíme zařídit volbou $X < \frac{1}{|a|}$.

Na intervalu $(-X, X)$ tak máme kontrakci a proto metoda postupných aproximací konverguje, a její limita je pevným bodem zobrazení T a tedy řešením úlohy.

Navíc lehce zjistíme:

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = k \\ y_1 = k + akx \\ y_2 = k + akx + k\frac{a^2x^2}{2} \\ \vdots \\ y_n = k\sum_{i=0}^{n} \frac{a^i x^i}{i!} \end{array}\right\} \Rightarrow y = k\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} = k e^{ax}$$

řada konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$

, což je řešení, které hledáme.

To je navíc řešení na celém $\mathbb{R}$, ne jen na $(-X, X)$.

Pozn. na závěr: $C([-X, X])$ je úplný metrický prostor s metrikou $\rho(f,g) = \sup_{[-X,X]} |f - g|$

(2) Řešíme rovnici $2x + \sin x = 1$, tj.

$$x = \frac{1-\sin x}{2}.$$ Ta má očividně řešení na intervalu $(0, \pi/2)$.

Zvolíme $x_0 = 1/2$ (např.) a definujeme posloupnost $x_{n+1} = \frac{1-\sin x_n}{2}$.

Odpovídající zobrazení je $T : x \longmapsto \frac{1-\sin x}{2}$ na prostoru $[0, \pi/2] \subset \mathbb{R}$

Chceme $|Tx - Ty| \leq \alpha |x-y|$ pro $\alpha < 1$.

Máme $|Tx - Ty| = \left|\frac{1-\sin x}{2} - \frac{1-\sin y}{2}\right| = \frac{1}{2} \cdot |\sin x - \sin y| \leq \frac{1}{2} \cos \xi \cdot |x-y|$

pro nějaké $\xi \in (x, y)$ dle Lagrangeovy věty. Protože $\frac{\cos \xi}{2} < 1$ vždy, máme důkaz kontrakce. Proto metoda konverguje a po několika iteracích bychom měli být blízko řešení:

$x_0 = 1/2$

$x_1 \doteq 0{,}26$

$x_2 \doteq 0{,}37$

$x_3 \doteq 0{,}32$

$x_4 \doteq 0{,}34$ ... hledaná hodnota je cca $0{,}335$

(3) Rovnice $y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 s y(s)\, ds + x = \frac{x^2}{2}\int_0^1 s y(s)\, ds + x$

Zvolíme $y_0 = 0$ a $y_{n+1} = \frac{x^2}{2}\int_0^1 s y_n(s)\, ds + x$. Protože $\int_0^1 s y(s)\, ds$ je číslo, tvoříme takto neustále polynomy ve tvaru $Ax^2 + x$, mění se jen číslo A.

$T : y \longmapsto \frac{x^2}{2}\int_0^1 s y(s)\, ds + x$ je zobrazení z $C([0,1]) \to C([0,1])$.

Je to kontrakce? $\|Ty - Tz\| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x^2}{2}\int_0^1 s y(s)\, ds + x - \frac{x^2}{2}\int_0^1 s z(s) - x \right|$

$= \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x^2}{2}\int_0^1 s(y(s)-z(s))\, ds \right| = \frac{1}{2}\left|\int_0^1 s(y(s)-z(s))\, ds\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 s\,|y(s)-z(s)|\, ds$

$\leq \frac{1}{2} \cdot \sup_{x\in[0,1]} |y(x)-z(x)| \cdot \int_0^1 s\, ds = \frac{1}{4}\|y-z\| \Rightarrow$ máme kontrakci a proto metoda konverguje. Máme $y_0 = 0$, $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{6}x^2 + x$, $y_3 = \frac{5}{24}x^2 + x$, ...

Přesné řešení: $\alpha x^2 + x = \frac{x^2}{2}\int_0^1 \alpha s^3 + s^2\, ds + x$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha s^4}{4} + \frac{s^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow 24\alpha = 3\alpha + 4$

$\underline{\underline{\alpha = \frac{4}{21}}} \doteq 0{,}19$

4) Tuto úlohu umíme vyřešit i metodou z prvního semestru

Nejprve: Je-li $a=0$, dostáváme konstantní posloupnost samých 0 a konvergence je zřejmá.

Nechť dále $a>0$. Nabízí se zvolit jako úplný metrický prostor interval $[0,1]$.

$Tx := x - \frac{1}{2}(x^2-a)$

Pak $|Tx-Ty| = \left|x - \frac{x^2}{2} + \frac{a}{2} - y + \frac{y^2}{2} - \frac{a}{2}\right| = \left|x-y-\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right| = \left|(x-y)\cdot\left(1-\frac{x+y}{2}\right)\right|$

$= |x-y|\cdot\left|1-\frac{x+y}{2}\right|.$

Zde ale máme problém. Nenajdeme žádné $\alpha\in[0,1)$ tak, aby $\left|1-\frac{x+y}{2}\right|\leq\alpha$ $\forall x,y\in[0,1]$. Pokud jsou x,y blízko nule, je $\left|1-\frac{x+y}{2}\right|$ blízko jedničky.

Prostor $[0,1]$ tak není vhodný. Ale všimneme si $x_1=\frac{a}{2}$. Mohli bychom vzít za prostor interval $[\frac{a}{2},1]$ a potom $\left|1-\frac{x+y}{2}\right|\leq 1-\frac{a}{2}<1$ a Banachova věta projde. Musíme ale vědět, že $Tx\in[\frac{a}{2},1]$ pro každé $x\in[\frac{a}{2},1]$.

Začneme pozorováním, že $\frac{a}{2}<\sqrt{a}\leq 1$ pro každé $a\in(0,1]$.

Dále zjistíme, že $Tx\geq\frac{a}{2}$ $\forall x\in[\frac{a}{2},1]$. Opravdu: $Tx = x-\frac{x^2}{2}+\frac{a}{2} \overset{?}{\geq} a/2$

$\Rightarrow x-\frac{x^2}{2}\geq 0 \Rightarrow x^2-2x\leq 0$

$x(x-2)\leq 0$

což platí $\forall x\in[0,2]$, tedy i pro naše $x\in[a/2,1]$.

Nakonec potřebujeme $Tx\leq 1$ $\forall x\in[a/2,1]$

$x-\frac{x^2}{2}+\frac{a}{2}\overset{?}{\leq}1$

$x^2-2x+2-a\overset{?}{\geq}0$ Diskriminant této rovnice je $D=4\cdot(a-1)$, tedy $D=0$ pro $a=1$, ale pak $x^2-2x+2-a=x^2-2x+1\geq 0$ vždy a pro $a<1$ je $D<0$ a $x^2-2x+2-a>0$ vždy.

Víme tak, že $T:[a/2,1]\longrightarrow[a/2,1]$ a je tam kontrakce. Má tak pevný bod, ale jaký?

$Tx=x$: $x=x-\frac{1}{2}(x^2-a) \Rightarrow x^2-a=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$, ale $-\sqrt{a}\notin[\frac{a}{2},1]$ a proto je pevný bod $\sqrt{a}$. Podobné nerovnosti jako výše bychom řešili při důkazu metodou z 1. semestru: posl. $\{x_n\}$ je monotónní (rostoucí) a shora omezená číslem $\sqrt{a}$.