

Zápočtový test č. 1 - 2. 4.

1. Spočtete délku křivky zadané parametricky

$$\begin{aligned}x &= t - \sin t \\y &= 1 - \cos t, \quad \text{kde } t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

2. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' = 4x\sqrt{y}$$

a najděte všechna řešení této rovnice splňující podmínku $y(2) = 1$.

Řešení

1. Přímou použijeme příslušný vzorec a dopočítáme délku až do konce.

$$\begin{aligned}l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt \\&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \, dt \\&= 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt = -4 \left[\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8.\end{aligned}$$

Pokud bychom nepřišli na trik, jak upravit $\sqrt{1 - \cos t}$, můžeme postupovat i takto:

$$\begin{aligned}l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt \\&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\sqrt{1 + \cos t}} \, dt \\&= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \cos t}} \, dt = 2\sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1 + z}} \\&= 4\sqrt{2} \left[\sqrt{1 + z} \right]_{-1}^1 = 8.\end{aligned}$$

2. Jde o rovnici se separovanými proměnnými. Vidíme, že $y = 0$ je konstantní řešení a že hledáme pouze nezáporné funkce y , jinak nebude odmocnina definovaná. Separaci proměnných lehce dostaneme

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 4 \int x \, dx$$

a odtud

$$2\sqrt{y} = 2x^2 + 4C,$$

což po přejmenování integrační konstanty lze zjednodušit na

$$\sqrt{y} = x^2 + C.$$

Zde musíme být opatrní, LS této rovnice je nezáporná, takže musíme zajistit, aby PS byla rovněž nezáporná, tedy $x^2 + C \geq 0$. Vidíme, že pro $C \geq 0$ nemáme žádné omezení, zatímco pro $C < 0$ omezujeme definiční obor nalezené funkce na množinu $|x| \geq \sqrt{-C}$, neboli na intervaly $(-\infty, -\sqrt{-C})$ a $(\sqrt{-C}, \infty)$. Na těchto intervalech mohou invertovat odmocninu a dostat řešení

$$y = (x^2 + C)^2.$$

Pro $C > 0$ je toto řešení definované na celém $\mathbb{R}$ a je kladné. Pro $C = 0$ je toto řešení také definované na celém $\mathbb{R}$, ale v bodě $x = 0$ se dotkne nuly, kde se může nalepit na konstantní řešení $y = 0$. Pro $C < 0$ je toto řešení definované jen na $(-\infty, -\sqrt{-C})$ a $(\sqrt{-C}, \infty)$, přičemž v krajních bodech je hodnota tohoto řešení $y = 0$, tam se tedy nalepí na konstantní řešení a může být prodlouženo za hranice těchto intervalů.

Obecně tedy pozorujeme, že kromě řešení pro kladná C , která se konstantního řešení nikdy nedotknou, máme celou škálu řešení, které se v libovolném nekladném bodě x mohou nalepit na konstantní řešení a v libovolném nezáporném bodě x se z konstantního řešení mohou zase odlepit. Můžeme tak dostat řešení typu

$$y = \begin{cases} (x^2 + C_1)^2 & \text{pro } x \leq -\sqrt{-C_1} \\ 0 & \text{pro } -\sqrt{-C_1} < x \leq \sqrt{-C_2} \\ (x^2 + C_2)^2 & \text{pro } x > \sqrt{-C_2}, \end{cases}$$

kde $C_1, C_2 \leq 0$.

Podmínka $y(2) = 1$ nám identifikuje C_2 , ale nikoliv C_1 . Navíc máme $1 = (4 + C)^2$, což dává hodnoty $C = -3$ a $C = -5$. Jenže pro $C = -5$ je bod $x = 2$ mimo interval $(\sqrt{-C}, \infty)$, tedy $(\sqrt{5}, \infty)$. Proto jediná správná hodnota hledané konstanty je $C = -3$ a řešení splňující tuto podmínku mají tvar

$$y = \begin{cases} (x^2 + C_1)^2 & \text{pro } x \leq -\sqrt{-C_1} \\ 0 & \text{pro } -\sqrt{-C_1} < x \leq \sqrt{3} \\ (x^2 - 3)^2 & \text{pro } x > \sqrt{3}, \end{cases}$$

kde $C_1 \leq 0$.