

### Zápočtový test č. 1 - 1. 4.

1. Najděte obsah oblasti ohraničené křivkou

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^2 - 2xy + y^2$$

2. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x.$$

### Řešení

1. Po přepisu do polárních souřadnic je daná křivka vyjádřena jako

$$r^4 = r^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^2$$

a tedy

$$r = |\cos \varphi - \sin \varphi| = f(\varphi)$$

Podle vzorce pro obsah takto zadané plochy je

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi.$$

Odtud už snadno

$$S = \int_0^{\pi} (1 - \sin(2\varphi)) d\varphi = \left[ \varphi + \frac{\cos(2\varphi)}{2} \right]_0^{\pi} = \pi.$$

2. Pro určení obecného řešení homogenní rovnice vyřešíme rovnici, kterou dostaneme z charakteristického polynomu

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

a dostaneme

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Obecné řešení homogenní rovnice je proto

$$y_h = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x.$$

Pravá strana má speciální tvar s koeficienty  $\mu = 1$ ,  $\nu = 1$ ,  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = 1$ . Protože  $\mu + \nu i = 1 + i$  je kořen charakteristického polynomu a

$P_1, P_2$  jsou polynomy nultého stupně, budeme hledat partikulární řešení ve tvaru

$$y_p = Ax e^x \cos x + Bx e^x \sin x.$$

Spočítáme derivace této funkce:

$$\begin{aligned} y'_p &= A e^x \cos x + B e^x \sin x \\ &\quad + Ax e^x \cos x + Bx e^x \sin x \\ &\quad - Ax e^x \sin x + Bx e^x \cos x \\ &= A e^x \cos x + B e^x \sin x \\ &\quad + (A + B)x e^x \cos x + (B - A)x e^x \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''_p &= A e^x \cos x + B e^x \sin x \\ &\quad - A e^x \sin x + B e^x \cos x \\ &\quad + (A + B) e^x \cos x + (B - A) e^x \sin x \\ &\quad + (A + B)x e^x \cos x + (B - A)x e^x \sin x \\ &\quad - (A + B)x e^x \sin x + (B - A)x e^x \cos x. \end{aligned}$$

Dohromady tak

$$y''_p - 2y'_p + 2y_p = 2B e^x \cos x - 2A e^x \sin x = e^x \sin x$$

a odtud už snadno  $B = 0$ ,  $A = -\frac{1}{2}$ .

Obecné řešení zadané rovnice je

$$y = y_p + y_h = -\frac{1}{2}x e^x \cos x + C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x,$$

kde  $C_{1,2} \in \mathbb{R}$  a  $x \in \mathbb{R}$ .