

Písemka č. 2 - 14. 5. 12:20

1. V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{3n} \left(\frac{\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+4}}{n^p} \right).$$

2. Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} (2x - 2y + 5).$$

Řešení

1. Začneme několika pozorováními. Nejprve posloupnost $\{\frac{n-1}{3n}\}$ je omezená a monotónní (má limitu $\frac{1}{3}$), takže zadaná řada dle Abelova kritéria konverguje, pokud konverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+4}}{n^p} \right).$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+4}}{n^p} &= \frac{3}{(\sqrt{n^2+7} + \sqrt{n^2+4})n^p} \\ &= \frac{1}{n^{p+1}} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{7}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}}}. \end{aligned}$$

Druhý činitel v tomto součinu tvoří kladnou rostoucí posloupnost s limitou $\frac{3}{2}$. Proto i tuto část můžeme vyřešit Abelovým kritériem, tedy zadaná řada bude konvergovat, pokud ukážeme, že konverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{p+1}}.$$

To už je triviální, použijeme Leibnizovo kritérium a fakt, že n^{-p-1} jde monotónně k nule právě tehdy když $p+1 > 0$, tedy $p > -1$. Pro $p \leq -1$

je naopak porušena nutná podmínka konvergence řady, původní řada tak konvergovat nemůže. Zadaná řada tak konverguje pro $p > -1$.

Pokračujeme absolutní konvergencí. Využijeme výše uvedených faktů, abychom usoudili, že

$$\left| (-1)^n \frac{n-1}{3n} \left(\frac{\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+4}}{n^p} \right) \right| \sim \frac{1}{n^{p+1}}.$$

Dle limitního srovnávacího kritéria tedy zadaná řada konverguje absolutně právě tehdy, když $p+1 > 1$, tedy $p > 0$. Pro $-1 < p \leq 0$ řada konverguje neabsolutně a jak už jsme zjistili výše, pro $p \leq -1$ řada diverguje.

2. Spočítáme parciální derivace zadané funkce, abychom našli stacionární body

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x^2+y^2} (2x(2x-2y+5) + 2) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x^2+y^2} (2y(2x-2y+5) - 2). \end{aligned}$$

Pro určení stacionárních bodů potřebujeme vyřešit soustavu

$$\begin{aligned} (2x(2x-2y+5) + 2) &= 0 \\ (2y(2x-2y+5) - 2) &= 0, \end{aligned}$$

kde využijeme toho, že $2x-2y+5$ se vyskytuje v obou rovnicích. Dostaneme tak

$$2x-2y+5 = -\frac{1}{x} = \frac{1}{y},$$

odtud $x = -y$, což dosadíme do jedné z rovnic a vyřešíme

$$4x^2 + 4x^2 + 10x + 2 = 2(4x+1)(x+1) = 0.$$

Získáváme dva stacionární body, $A = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $B = (-1, 1)$.

Pro určení, zda jsou ve stacionárních bodech extrémy nebo ne, potřebujeme druhé derivace.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^{x^2+y^2} \left(2x(2x(2x-2y+5)+2) + 2(2x-2y+5) + 4x \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= e^{x^2+y^2} \left(2y(2x(2x-2y+5)+2) - 4x \right). \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{x^2+y^2} \left(2y(2y(2x-2y+5)-2) + 2(2x-2y+5) - 4y \right)\end{aligned}$$

Při dosazování stacionárních bodů do těchto výrazů si povšimneme, že první část je vždy rovná nule, protože je stejná jako řešené rovnice při určování stacionárních bodů. Tím se nám práce značně ulehčí a dostaneme

$$\mathbb{H}_f(A) = e^{\frac{1}{8}} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$$

což je pozitivně definitní matice, což znamená, že v bodě A je lokální minimum.

$$\mathbb{H}_f(B) = e^2 \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

což je indefinitní matice, protože má záporný determinant. To znamená, že v bodě B není lokální extrém.