

Písemka č. 2 - 20. 5. 14:50

1. Sečtete číselnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2^n}.$$

2. Uvažujte rovnici

$$y^2 dx + (xy - 1) dy = 0.$$

- a) Ověřte, že rovnice není ve tvaru totálního diferenciálu.
- b) Najděte integrační faktor ve tvaru $\mu(y)$.
- c) Vyřešte rovnici přenásobenou nalezeným integračním faktorem.

Řešení

1. Abychom našli hledaný součet, sečteme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n + 1)x^n,$$

což je očividně řada s poloměrem $R = 1$, takže nakonec nám bude stačit spočítat $f(\frac{1}{2})$.

Nejprve lehce

$$f_1(x) = \sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Označme $f_2(x) = f(x) - f_1(x) = \sum_0^{\infty} n(n+1)x^n$. Pak platí

$$F_2(x) = \int f_2(x) dx = \sum_0^{\infty} nx^{n+1}$$

Označme dále $g(x) = \frac{F_2(x)}{x^2} = \sum_0^{\infty} nx^{n-1}$ ($n = 0$ nedělá problém, protože násobíme výraz $\frac{1}{x}$ nulou) a potom při volbě integrační konstanty $C = 1$

$$G(x) = \int g(x) dx = \sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

což už jsme spočítali výše. Teď už lehce

$$g(x) = G'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

a dále

$$F_2(x) = x^2 g(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

a

$$f_2(x) = F_2'(x) = \frac{2x(1-x)^2 - 2(1-x)(-1)x^2}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

Nakonec

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^3}$$

a konečně

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{8}} = 10.$$

2. Označme $M(x, y) = y^2$, $N(x, y) = xy - 1$. Pro ověření, zda je rovnice ve tvaru totálního diferenciálu zjistíme, zda platí $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Máme

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

a rovnice tak opravdu není ve tvaru totálního diferenciálu.

Dále budeme hledat integrační faktor ve tvaru $\mu(y)$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial(M(x, y)\mu(y))}{\partial y} &= \mu'(y)M(x, y) + \mu(y)\frac{\partial M}{\partial y} = \mu'(y)y^2 + 2y\mu(y) \\ \frac{\partial(N(x, y)\mu(y))}{\partial x} &= \mu(y)\frac{\partial N}{\partial x} = y\mu(y) \\ y^2\mu'(y) &= -y\mu(y). \end{aligned}$$

Dostáváme rovnici jen v proměnné y , kterou lehce vyřešíme

$$\begin{aligned} \ln |\mu| &= \int \frac{d\mu}{\mu} = - \int \frac{dy}{y} = -\ln |y| = \ln |y|^{-1} \\ \mu(y) &= \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Konstanty a absolutní hodnoty jsme mohli zapomenout, protože integrační faktor je určen až na násobek. Rovnice přenásobená integračním faktorem je

$$y \, dx + \left(x - \frac{1}{y} \right) dy = 0,$$

ta už samozřejmě je ve tvaru totálního diferenciálu a její řešení $U(x, y)$ nalezneme standardním postupem.

$$U(x, y) = \int y \, dx = xy + C(y)$$

a nakonec

$$N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} = x + C'(y) = x - \frac{1}{y}$$

$$C'(y) = -\frac{1}{y}$$

$$C(y) = \int -\frac{dy}{y} = -\ln |y|$$

$$U(x, y) = xy - \ln |y|$$

a řešení dané rovnice jsou dána implicitně vztahem $xy - \ln |y| = C$ pro libovolnou reálnou konstantu C .