

Domáci úkol č. 1

Zadáno: 29. 9.

Deadline: 6. 10.

Nalezněte extrémů funkcionálu Φ na množině M .

$$\Phi(y) = \int_2^3 \frac{x^3}{(y')^2} dx$$

$$M = \{y \in C^1([2, 3]); \quad y(2) = 4, \quad y(3) = 9\}$$

Řešení

Máme $f(x, y, z) = \frac{x^3}{z^2}$, a tedy $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6\frac{x^3}{z^4}$, což je na našem intervalu různé od nuly a máme tedy regularitu minimizéru (tu však ani nepotřebujeme, protože funkcionál nezávisí na y a proto stačí použít Du Bois-Raymondovo Lemma, nepotřebujeme pracovat s druhými derivacemi). Protože navíc f nezávisí na y , tak můžeme s touto informací rovnou psát

$$D^2 \tilde{f}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6\frac{x^3}{z^4} \end{pmatrix},$$

což je pozitivně semidefinitní matice. To znamená, že náš funkcionál Φ je konvexní a jakýkoli stacionární bod, který najdeme, je automaticky bodem minima.

Sestavíme a vyřešíme Euler-Lagrangeovy rovnice:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$-2 \frac{d}{dx} \frac{x^3}{(y')^3} = 0$$

$$\frac{x^3}{(y')^3} = C_1 \quad \text{přímě sem vede DB-R lemma}$$

$$y' = \sqrt[3]{C_1} x = C_2 x$$

$$y = \frac{C_2}{2} x^2 + C_3.$$

Dopočítáme konstanty z okrajových podmínek.

$$y(2) = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2C_2 + C_3$$

$$y(3) = 9 \quad \Rightarrow \quad 9 = 9/2C_2 + C_3,$$

odkud lehce $C_2 = 2$, $C_3 = 0$. Nalezený stacionární bod je tedy

$$y_0 = x^2$$

a už dříve jsme o něm zjistili, že se jedná o bod minima funkcionálu Φ .