

Domácí úkol č. 2

Zadáno: 6. 10.

Deadline: 13. 10.

Nalezněte extrémů funkcionálu Φ na množině M vzhledem k vazbě $G = 3$.

$$\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 dx$$

$$M = \{y \in C^1([0, 1]); \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 6\}$$

$$G(y) = \int_0^1 y dx$$

Řešení

Nejprve ověříme nutnou podmínku pro práci s Lagrangeovými multiplikátory. Potřebujeme

$$dG(y) \neq 0.$$

Máme

$$DG(y; h) = \int_0^1 h dx,$$

což není identická nula pro všechny $h \in \{h \in C^1([0, 1]); h(0) = 0, \quad h(1) = 0\}$, proto je nutná podmínka splněna. Sestavíme tak funkci $b(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = z^2 - \lambda y$. Lehce vidíme $\frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 2$, což je různé od nuly a máme tedy regularitu minimizéru. Sestavíme a vyřešíme Euler-Lagrangeovy rovnice:

$$\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial b}{\partial z} = 0$$

$$-\lambda - \frac{d}{dx} 2y' = 0$$

$$y'' = -\frac{\lambda}{2}$$

$$y' = -\frac{\lambda x}{2} + A$$

$$y = -\frac{\lambda x^2}{4} + Ax + B.$$

Dopočítáme konstanty z okrajových podmínek.

$$\begin{aligned}y(0) = 1 &\Rightarrow 1 = B \\y(1) = 6 &\Rightarrow 6 = -\frac{\lambda}{4} + A + 1,\end{aligned}$$

odkud lehce $A = 5 + \frac{\lambda}{4}$. Dopočítáme dále hodnotu λ z vazební podmínky.

$$\begin{aligned}G(y) &= 3 \\ \int_0^1 \left(-\frac{\lambda}{4}\right)x^2 + \left(5 + \frac{\lambda}{4}\right)x + 1 \, dx &= 3 \\ -\frac{\lambda}{12} + \frac{5}{2} + \frac{\lambda}{8} + 1 &= 3 \\ \frac{\lambda}{24} &= -\frac{1}{2} \\ \lambda &= -12.\end{aligned}$$

Nalezený stacionární bod je tedy

$$y = 3x^2 + 2x + 1.$$

Podíváme se na případnou konvexitu funkce $\tilde{b}_x(y, z) = z^2 - \lambda y$. Lehce

$$D^2\tilde{b}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

což je pozitivně semidefinitní matice. To znamená, že funkcionál $\Phi - \lambda G$ je konvexní a jakýkoli stacionární bod, který najdeme, je automaticky bodem minima. Proto je také funkce $y = 3x^2 + 2x + 1$ minimem funkcionálu Φ vzhledem k vazbě $G = 3$.