

Domácí úkol č. 3

Zadáno: 13. 10.

Deadline: 20. 10.

Nalezněte bodovou limitu posloupnosti funkcí $f_n(x)$ na intervalu $(0, \infty)$. Zjistěte, zda tato posloupnost funkcí konverguje ke své limitě na tomto intervalu stejnoměrně či alespoň lokálně stejnoměrně.

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$$

Řešení

Nejprve najdeme bodovou limitu. Není těžké si všimnout, že pro libovolné pevné $x \in (0, \infty)$ jde posloupnost $nx \rightarrow \infty$ a proto je bodová limita

$$f(x) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2} \quad \text{na } (0, \infty).$$

Nyní definuji

$$\begin{aligned} \sigma_n &:= \sup_{x \in (0, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{(0, \infty)} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(nx) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \inf_{(0, \infty)} \operatorname{arctg}(nx) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

protože infimum našich funkcí f_n je na tomto intervalu očividně nula, což je funkční hodnota v krajním bodě $x = 0$. Vidím tak, že $\sigma_n \not\rightarrow 0$ a proto $f_n \not\Rightarrow f$ na $(0, \infty)$.

Zároveň vidíme, že problematickým bodem v této konvergenci je $x = 0$. Uvažujme tak nyní intervaly $[\delta, \infty)$ pro pevné $\delta > 0$. Zde máme

$$\begin{aligned} \sigma_n &:= \sup_{x \in [\delta, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[\delta, \infty)} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(nx) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \inf_{[\delta, \infty)} \operatorname{arctg}(nx) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n\delta). \end{aligned}$$

Očividně $\sigma_n \rightarrow 0$ a proto $f_n \Rightarrow f$ na $[\delta, \infty)$. To tedy znamená, že $f_n \overset{loc}{\Rightarrow} f$ na $(0, \infty)$.