

Domácí úkol č. 4

Zadáno: 20. 10.

Deadline: 27. 10.

Nalezněte obor absolutní a neabsolutní konvergence řady. Rozhodněte, zda na svém oboru konverguje stejnoměrně či alespoň lokálně stejnoměrně.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2^n} \right)$$

Řešení

Nejprve si všimneme, že ať už bude x jakékoli, pro dostatečně velká n se argument funkce tangens dostane do intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a nebudeme mít problémy s definičním oborem.

Víme, že pro libovolné pevné $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2^n} \right)}{\frac{x}{2^n}} = 1$$

a tedy

$$x^n \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2^n} \right) \sim x^n \frac{x}{2^n} = x \left(\frac{x}{2} \right)^n.$$

Nutná podmínka konvergence řady nám dá, že

$$\left(\frac{x}{2} \right)^n \rightarrow 0,$$

což je ekvivalentní podmínce $|x| < 2$. Z výše uvedených úvah plyne, že můžeme používat srovnávací kritérium s mocninnou řadou, protože pro dostatečně velká n

$$\left| \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2^n} \right)}{\frac{x}{2^n}} \right| \leq 2.$$

Máme tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| x^n \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2^n} \right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2|x| \left(\frac{|x|}{2} \right)^n$$

a řada napravo pro $|x| < 2$ konverguje. Naše řada tedy na tomto intervalu konverguje absolutně. Mimo tento interval naopak nekonverguje vůbec, protože je porušena nutná podmínka konvergence řady. Vskutku, zde můžeme použít opačný odhad

$$\left| \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \right| \geq \frac{1}{2}$$

a psát pro $|x| \geq 2$

$$\left| x^n \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \geq \frac{1}{2} |x| \left(\frac{|x|}{2} \right)^n,$$

kde pravá strana nejde k nule, proto ani levá strana k nule jít nemůže.

Co se týče stejnoměrné konvergence, tak na intervalu $(-2, 2)$ řada nemůže konvergovat stejnoměrně. Označme $s_n(x)$ posloupnost částečných součtů naší řady a $s(x)$ limitu této posloupnosti, neboli součet řady. Jelikož řada v krajním bodě $x = 2$ diverguje, $s(x)$ tam má nekonečnou limitu. Naopak $s_n(2)$ je pro pevné n konečné číslo, jde totiž o součet konečně mnoha členů. Lehce tak nahlédneme, že pro libovolné pevné n je

$$\sigma_n = \sup_{x \in (-2, 2)} |s_n(x) - s(x)| = \infty.$$

Problém v druhém krajním bodě je trochu jiný, místo toho aby tam řada divergovala do nekonečna, tak osciluje. Funkce $s(x)$ tak může mít (a zřejmě také má) v bodě $x = -2$ konečnou limitu, nicméně posloupnost $s_n(-2)$ se té limitě neblíží, a proto

$$\tilde{\sigma}_n = \sup_{x \in (-2, 0]} |s_n(x) - s(x)| \geq K_0.$$

pro nějaké $K_0 > 0$ nezávislé na n .

Lokálně stejnoměrnou konvergenci dokážeme Abelovým kritériem následujícím způsobem. Posloupnost $a_k(x)$ bude $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\frac{x}{2^k}}$. To je pro $x \in [-2 + \delta, 2 - \delta]$ klesající, stejně stejnoměrně omezená posloupnost (omezená například svým prvním členem vyčísleným v $x = 2$, tj. $\operatorname{tg}(1)$) a $b_k(x)$ bude $x \left(\frac{x}{2}\right)^k$, což je stejnoměrně konvergující řada na $[-2 + \delta, 2 - \delta]$ pro libovolné $\delta > 0$.

Šlo by také postupovat Weierstrassovým kritériem, lehce bychom totiž zjistili, že

$$\sigma_n = \sup_{x \in [-2 + \delta, 2 - \delta]} \left| x^n \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| = (2 - \delta)^n \operatorname{tg}\left(\frac{2 - \delta}{2^n}\right),$$

přičemž příslušná řada $\sum \sigma_n$ konverguje.