

Domáci úkol č. 5

Zadáno: 27. 10.

Deadline: 3. 11.

Zjistěte, zda zadaná řada konverguje stejnoměrně na daném intervalu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^k e^{nx}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2$$

na intervalu

- a) $(-\infty, -1]$
- b) $[-1, 0]$
- c) $[0, 1]$.

Řešení

Nejprve si všimneme, že pro $x = 1$ jde o řadu $\sum e^n$, která očividně diverguje. Proto zadaná řada nemůže konvergovat na intervalu c), natož aby tam konvergovala stejnoměrně. Dále se tak budeme zabývat jen případem, kdy x bude nekladné číslo.

Začneme nutnou podmínkou a označíme $f_n(x) = x^k e^{nx}$. Co se týče bodové konvergence, pro $x = 0$ jde o posloupnost nul, která tedy konverguje k nule, a pro $x < 0$ pevné je exponent exponenciály záporný a jde do $-\infty$, když $n \rightarrow \infty$. Exponenciála tak jde do nuly, zatímco člen před ní je pevné číslo pro pevné x . Proto máme $f_n(x) \rightarrow 0$ pro každé $x \leq 0$, když $n \rightarrow \infty$.

Pro účely vyšetření stejnoměrné konvergence potřebujeme najít $\sigma_n = \sup_x |f_n(x)|$ a pro tento okamžik budeme pracovat na celém intervalu $(-\infty, 0]$. Pokud někde narazíme na problém, tento interval rozdělíme na případy a) a b). V tuto chvíli je tedy n pevné. Víme, že $f_n(0) = 0$ a lehce zjistíme, že také $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$, protože exponenciála je silnější než mocnina (škálovací limita). Supremum se tak bude nabývat uprostřed intervalu $(-\infty, 0)$ ve stacionárním bodě funkce $f_n(x)$. Ten zjistíme derivací. Máme

$$f'_n(x) = kx^{k-1} e^{nx} + x^k n e^{nx} = x^{k-1} e^{nx} (k + nx)$$

Položíme-li derivaci rovnou nule, vyskočí na nás jediný podezřelý bod, a to $X_n = -\frac{k}{n}$. Povšimneme si, že pro k sudé je v tomto bodě maximum, protože je

naše funkce $f_n(x)$ na záporných číslech kladná, zatímco pro k liché je v tomto bodě minimum, protože je naše funkce na záporných číslech záporná. My však stejně hledáme maximum absolutní hodnoty naší funkce, takže nalezený bod nám vyhovuje pro všechna k . Vyčíslíme $f_n(X_n)$ a to musí být σ_n . Máme

$$\sigma_n = f_n(X_n) = \frac{k^k e^k}{n^k}.$$

Vidíme, že $\sigma_n \rightarrow 0$ když $n \rightarrow \infty$, a proto je splněna nutná podmínka stejnoměrné konvergence. Navíc si povšimneme, že právě získaná informace nám stačí k rozhodnutí o stejnoměrné konvergenci celé řady na základě Weierstrassova kritéria. Máme totiž

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^k e^k}{n^k},$$

což je konvergentní řada, protože $k \geq 2$. Zjistili jsme tak, že naše řada konverguje stejnoměrně na celém intervalu $(-\infty, 0]$ a tedy samozřejmě také jednotlivě na intervalu a) a na intervalu b).