

## Domácí úkol č. 6

Zadáno: 3. 11.

Deadline: 10. 11.

Určete obsah části roviny ohraničené následujícími křivkami

$$x + y = a$$

$$x + y = b$$

$$y = \alpha x$$

$$y = \beta x,$$

kde  $0 < a < b$  a  $0 < \alpha < \beta$ .

### Řešení

Zadání přímo vybízí k zavedení nových souřadnic

$$x + y = u$$

$$\frac{y}{x} = v.$$

Lehce si povšimneme, že naše oblast leží v prvním kvadrantu, takže zatím nevidíme žádné potíže. Pro použití věty o substituci však potřebujeme mít opačný zápis, než je ten výše, tedy vyjádřit  $x$  a  $y$  jako funkce proměnných  $u$  a  $v$ . To je ale hodně jednoduché a po krátké práci objevíme, že

$$x = \frac{u}{v+1}$$

$$y = \frac{uv}{v+1}.$$

Tím máme dáno zobrazení  $\varphi$  a můžeme spočítat jeho jakobián.

$$J_{\varphi} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v+1} & -\frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(v+1)^2}.$$

Protože je jakobián na naší oblasti očividně nenulový, nenacházíme žádný problém a můžeme přímo použít větu o substituci a dostat

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \int_\alpha^\beta \frac{u}{(v+1)^2} \, dv \, du = \int_a^b u \left( \int_\alpha^\beta \frac{dv}{(v+1)^2} \right) \, du \\ &= \left( \int_\alpha^\beta \frac{dv}{(v+1)^2} \right) \cdot \left( \int_a^b u \, du \right) = \left( \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1} \right) \frac{b^2 - a^2}{2} \\ &= \frac{(\beta - \alpha)(b^2 - a^2)}{2(\alpha + 1)(\beta + 1)}. \end{aligned}$$