

Domácí úkol č. 7

Zadáno: 10. 11.

Deadline: 24. 11.

Určete objem tělesa omezeného plochou

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz.$$

Řešení

Zadání přímo vybízí k zavedení sférických souřadnic

$$x = r \cos \varphi \sin \psi$$

$$y = r \sin \varphi \sin \psi$$

$$z = r \cos \psi.$$

Navíc je útvar očividně symetrický, z pravé strany, která musí být kladná, usoudíme, že se těleso nachází jen ve čtyřech oktantech z osmi. My spočítáme objem tělesa v prvním oktantu ($x, y, z \geq 0$). To odpovídá úhlům $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ a $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Zadaná rovnice pak vede po převodu do sférických souřadnic k

$$r^3 = 3 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \psi \cos \psi.$$

Proto integrační meze pro r budou $r \in (0, \sqrt[3]{3 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \psi \cos \psi}) =: (0, A)$. Dále už můžeme počítat

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^A r^2 \sin \psi \, dr \, d\psi \, d\varphi \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \psi \cos \psi \sin \psi \, d\psi \, d\varphi \\ &= 4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \psi \cos \psi \, d\psi \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \right) \\ &= |t = \sin \psi, t = \sin \varphi| = 4 \left(\int_0^1 t^3 \, dt \right) \left(\int_0^1 t \, dt \right) = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$