

Domácí úkol č. 8

Zadáno: 24. 11.

Deadline: 1. 12.

Zjistěte, pro které hodnoty parametrů integrál konverguje, a spočtěte jej.

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$$

Řešení

Aby integrál konvergoval, potřebujeme $a \geq 0$ a $b \geq 0$. Triviálně tedy konverguje také pro $a = b \in \mathbb{R}$, ale to není zajímavý případ, tak se mu nebudeme dále věnovat. Příklad je vyloženě stavěný na použití Fubiniho věty. Všimneme si totiž, že

$$e^{-ax^2} - e^{-bx^2} = \left[e^{-cx^2} \right]_{c=b}^{c=a} = \int_b^a \frac{\partial}{\partial c} (e^{-cx^2}) dc = \int_b^a -x^2 e^{-cx^2} dc.$$

Proto díky Fubiniho větě

$$I(a, b) = \int_0^\infty \int_a^b e^{-cx^2} dc dx = \int_a^b \int_0^\infty e^{-cx^2} dx dc.$$

Vnitřní integrál sice neposkytuje možnost najít primitivní funkci pomocí elementárních funkcí, ale použijeme známou hodnotu integrálu

$$\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Substituce $y = \sqrt{c}x$ (povšimněte si potřeby $c > 0$!) nám tak dá

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_a^b \int_0^\infty e^{-cx^2} dx dc = \int_a^b \int_0^\infty e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{c}} dc \\ &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} dc = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [2\sqrt{c}]_{c=a}^{c=b} = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}), \end{aligned}$$

což dává smysl pro $a, b \geq 0$, jakkoli jsme ale v postupu potřebovali $c > 0$. To však není problém, integrál z $c^{-\frac{1}{2}}$ dává dobrý smysl i v mezích od 0 do $b > 0$ a když jsou obě meze rovné nule, tak je integrál triviálně nulový.

Použitá metoda nevyžaduje ověřování žádných předpokladů, Fubiniho věta je ověřena tím, že nám vyšel konečný integrál.

Úloha lze řešit také pomocí věty o derivaci, při které se parciálně derivuje podle a i podle b . Integrovatelnou majorantu pro parciální derivace ale nalezneme pouze pro $a \geq a_0 > 0$ a $b \geq b_0 > 0$ s libovolnými $a_0, b_0 > 0$. Věta tak lze použít jen na $(0, \infty) \times (0, \infty)$ a platnost výsledku v krajních bodech $a = 0$ či $b = 0$ je třeba zdůvodnit jiným způsobem, například Léviho větou. Nechť tedy například pro pevné $b > 0$ chceme spočítat integrál

$$I(0, b) = \lim_{a \rightarrow 0+} I(a, b).$$

K tomu si stačí uvědomit, že funkce $\frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}$ tvoří rostoucí posloupnost pro $a \rightarrow 0+$. To ospravedlní platnost vztahu $I(a, b) = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$ pro $a \geq 0, b > 0$. Následně ze symetrie ($I(a, 0) = -I(0, a)$) i pro $b \geq 0$.