

Domáci úkol č. 9

Zadáno: 1. 12.

Deadline: 8. 12.

Spočítejte

$$\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) \, ds,$$

kde C je asteroida s rovnicí

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a > 0.$$

Řešení

Asteroidu popíšeme parametricky rovnicemi

$$x = a \cos^3 \varphi$$

$$y = a \sin^3 \varphi$$

pro $\varphi \in (0, 2\pi)$. Máme tak zobrazení $C : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Potřebujeme spočítat také derivace tohoto zobrazení, které nám dají

$$x' = -3a \cos^2 \varphi \sin \varphi$$

$$y' = 3a \sin^2 \varphi \cos \varphi.$$

Odtud spočítáme normu derivace jako

$$||C'|| = 3a |\sin \varphi \cos \varphi|.$$

Nyní už přímo spočítáme hledaný integrál, který přepíšeme podle definice.

$$\begin{aligned} I &:= \int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) \, ds = \int_0^{2\pi} (a^{\frac{4}{3}} \cos^4 \varphi + a^{\frac{4}{3}} \sin^4 \varphi) 3a |\sin \varphi \cos \varphi| \, d\varphi \\ &= 12a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi \sin \varphi + \sin^5 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 12a^{\frac{7}{3}} \left[-\frac{1}{6} \cos^6 \varphi + \frac{1}{6} \sin^6 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4a^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$