

Domácí úkol č. 10

Zadáno: 8. 12.

Deadline: 15. 12.

Najděte plošný obsah plochy

$$x^2 + y^2 = 1$$

omezené

$$y^2 + z^2 \leq 1.$$

Řešení

Jde o průnik válcové plochy s válcem, který je na tuto plochu kolmý. To se těžko kreslí, ale poměrně lehce parametrizuje. Zavedeme válcové souřadnice

$$x = \cos \varphi$$

$$y = \sin \varphi$$

$$z = z$$

pro popis válcové plochy $x^2 + y^2 = 1$. Determinant příslušné Gramovy matice je roven jedné. Musíme najít, kde se pohybují parametry (φ, z) , kterými jsme popsali onu válcovou plochu. To vyčteme z druhé nerovnosti, která vede na

$$\sin^2 \varphi + z^2 \leq 1$$

a tedy

$$z^2 \leq 1 - \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi, \quad \Rightarrow \quad z \in (-|\cos \varphi|, |\cos \varphi|), \varphi \in (0, 2\pi).$$

Teď už můžeme psát příslušný integrál a výsledek:

$$S_2(M) = \int_0^{2\pi} \int_{-|\cos \varphi|}^{|\cos \varphi|} dz d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} |\cos \varphi| d\varphi = 4 \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = 8.$$