Klasický variační počet

1. Nechť $\Phi(y) = \int_a^b (y^2 + (y')^2)\,\mathrm{d}x$, $y \in C^1[a,b]$. Spočtěte Gâteauxovy diferenciály $D\Phi(y;h)$, $D^2\Phi(y;h,k)$ a $D^3\Phi(y;h,k,l)$.

2. Spočtěte první Gâteauxův a Fréchetův diferenciál funkcionálu $\Phi(y) = \int_0^1 x^2(y^4 - (y')^2)\,\mathrm{d}x$ na $C^1[0,1]$.

3. Spočtěte první a druhý Gâteauxův diferenciál funkcionálu $\Phi(y) = \int_0^1 \left[x^2 \sin(\pi y) + (y')^3 + y''y''' + y\mathrm{e}^{-(y'')^2}\right] \mathrm{d}x$ na $C^3[0,1]$.

4. Spočtěte první Gâteauxův diferenciál funkcionálu $\Phi(y_1, y_2) = \int_0^1 \Big[xy_1^2 + (y_1')^2(y_2')^2 + (y_2')^6\Big]\,\mathrm{d}x$ na $C^1[0,1] \times C^1[0,1]$.

5. Ukažte, že funkcionál $\Phi(y) = \int_{-1}^1 x^2(y')^2\,\mathrm{d}x$ nemá na množině $M = \{y \in C^1[-1,1]; y(-1) = -1, y(1) = 1\}$ minimum.

   Návod: Uvažujte funkce $y_a(x) = \operatorname{arctg}(x/a)/\operatorname{arctg}(1/a)$.

6. Ukažte, že funkcionál $\Phi(y) = \int_{-1}^1 x^{\frac{2}{5}}(y')^2\,\mathrm{d}x$ nemá na množině $M = \{y \in C^1[-1,1]; y(-1) = -1, y(1) = 1\}$ minimum.

   Návod: Uvažujte řešení Euler–Lagrangeovy rovnice.

7. Najděte extremály (tj. řešení příslušné Euler–Lagrangeovy rovnice) pro funkcionál $\Phi(y) = \int_0^{2\pi} \left[(y')^2 - y^2\right] \mathrm{d}x$ na množině $M = \{y \in C^1[0,2\pi]; y(0) = y(2\pi) = 1\}$.

8. Nechť $\Phi(y) = \int_0^1 y^2(x^n - y)\,\mathrm{d}x$ pro n přirozené dostatečně velké číslo a nechť $M = \{u \in C^1[0,1]; u(0) = u(1) = 0\}$.
   a) Ukažte, že jediným řešením Euler–Lagrangeovy rovnice ležícím v množině M je $y_0 = 0$.
   b) Ukažte, že $D^2\Phi(y_0; h, h) > 0$ pro $h \in M$, $h \neq 0$.
   c) Ukažte, že y_0 není bodem extrému funkcionálu, tj. v libovolném okolí bodu y_0 (v metrice $C^1[0,1]$) existují body y_1, $y_2 \in M$ tak, že $\Phi(y_1) < \Phi(y_0) = 0 < \Phi(y_2)$.

Nalezněte extrémy následujících funkcionálů na množinách spojitě diferencovatelných funkcí až do hranice splňujících níže uvedené hraniční podmínky.

9. $\Phi(y) = \int_1^2 \left[x(y')^4 - 2y(y')^3\right] \mathrm{d}x$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$

10. $\Phi(y) = \int_2^3 \frac{x^3}{(y')^2} \mathrm{d}x$, $y(2) = 4$, $y(3) = 9$

11. $\Phi(y) = \int_0^1 \left[(y')^2 + x^2\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = -1$, $y(1) = 1$

12. $\Phi(y) = \int_0^a \left[1 - \mathrm{e}^{-(y')^2}\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$

13. $\Phi(y) = \int_0^1 y(y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = p > 0$, $y(1) = q > 0$.

    V následujících úlohách hledejte minimum funkcionálu $\Phi(y)$ na spojitě diferencovatelných funkcích, splňujících dané hraniční podmínky a vazební podmínku $g(y) = const$

14. $\Phi(y) = \int_0^\pi (y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = y(\pi) = 0$, $g(y) = \int_0^\pi y^2 \mathrm{d}x = 1$

15. $\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 6$, $g(y) = \int_0^1 y \,\mathrm{d}x = 3$

16. $\Phi(y) = \int_0^1 \left[x^2 + (y')^2\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = y(1) = 0$, $g(y) = \int_0^1 y^2 \mathrm{d}x = 2$

17. $\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$, $g(y) = \int_0^1 \left[y - (y')^2\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{12}$.

Klasický variační počet - aplikace ve fyzice

18. Nechť lagrangián L nezávisí explicitně na čase, tj. $L = L(x, \dot{x})$. Ukažte, že podél libovolné extremály platí zákon zachování energie, tj.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{E(x_0(t), \dot{x}_0(t))\Big\} = 0.$$

    ($E = \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L$).

19. Nechť pro pevné $i = \{1, 2, \dots N\}$ lagrangián nezávisí na x_i. Potom podél libovolné extremály platí zákon zachování hybnosti, tj.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))\Big\} = 0.$$

20. Hamiltonův princip v klasické mechanice tvrdí, že mechanická soustava popsaná souřadnicemi q_1, q_2, $\ldots$, q_N se bude pohybovat tak, aby akce

$$S = \int_P^Q L \, \mathrm{d}t \qquad L = T(t, q, \dot{q}) - U(t, q)$$

(T, U dané funkce, reprezentující kinetickou a potenciální energii soustavy) byla stacionární, tj. bude-li vektorová funkce $q(t)$ řešit Euler–Lagrangeovy rovnice. Napište tyto rovnice.

21. Pomocí zákona zachování energie (viz výše) ukažte, že pro extremály akce S dané lagrangiánem $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$ je parametr t přirozený parametr, tj.

$$\frac{d}{dt}\Big\{ \sum_{ij} g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j \Big\} = 0.$$

Sestavte Hamiltonovy rovnice pro následující funkcionály

22. $J(y_1, y_2) = \displaystyle\int_0^\pi (2y_1y_2 - 2y_1^2 + (\dot{y}_1)^2 - (\dot{y}_2)^2) \, \mathrm{d}t$

23. $J(y) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{t^2 + y^2}\sqrt{1 + (\dot{y})^2} \, \mathrm{d}t$

24. $J(y_1, y_2) = \displaystyle\int_a^b (t^2 + y_1(\dot{y}_1)^2 + y_2(\dot{y}_2)^2) \, \mathrm{d}t.$

KLASICKÝ VARIAČNÍ POČET

Funkcionál: Zobrazení z NLP $(X, \|\cdot\|) \longrightarrow \mathbb{R}$

Def.: $(X, \|\cdot\|)$ NLP, $F: X \to \mathbb{R}$ funkcionál, $a \in D_F$.

(i) $h \in X$, $\exists \delta > 0: \{a + th;\ |t| < \delta\} \subset D_F$. F má v bodě a ve směru h

Gateauxův diferenciál, jestliže existuje $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{F(a+th) - F(a)}{t} = \dfrac{d}{dt} F(a+th)\Big|_{t=0}$.

Značíme $DF(a;h)$ nebo $\delta F(a;h)$. Pro dané a, h je výsledek číslo.

Pro obecné a, h je to předpis, který vezme a, h a vyplivne číslo.
Jde o ekvivalent derivace ve směru

(ii) $\exists \delta > 0: U_\delta(a) \subset D_F$. F má v bodě a Fréchetův diferenciál, jestliže ex. spojitý lineární funkcionál $L: X \to \mathbb{R}$ t.ž. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(a+h) - F(a) - L(h)}{\|h\|} = 0$.

Značíme $dF(a)$. Je to tedy funkcionál, tedy předpis, který každému prvku $h \in X$ přiřadí číslo $L(h) \in \mathbb{R}$.
Jde o ekvivalent totálního diferenciálu

Pokud ex. $dF(a)$, pak $DF(a;h) = dF(a)(h)$. V příkladech najdeme $DF(a;h)$ $\forall h$, najdeme tím kandidáta na $dF(a)$ a ověříme definici.

Pozor, v nekonečné dimenzi existují nespojité lineární funkcionály (takové, že $h_k \to h$ a $L(h_k) \not\to L(h)$)

Vyšší Gat. dif.: $D^2F(a;h,k) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{DF(a+tk;h) - DF(a;h)}{t}$

Lokální minimum: X NLP, F funkcionál, $a \in D_F$. a je bod lok. min., jestliže

$$F(a) \leq F(x) \quad \forall x \in U_\varepsilon(a) \cap D_F \quad \text{pro nějaké } \varepsilon > 0$$

$$\text{ostré}: \quad F(a) < F(x) \quad \forall x \in P_\varepsilon(a) \cap D_F$$

Stacionární bod: Takový bod, že $DF(a;h) = 0$ $\forall h \in X$.

Eulerova nutná podmínka: F má v a lok. extrém. Pokud existuje $DF(a;h) \Rightarrow DF(a;h) = 0$.

Speciálně pro integrální funkcionály:

$$M = \{y \in C^1[a,b];\ y(a) = A,\ y(b) = B\} \qquad F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

M není NLP $\Rightarrow$ zavedeme lineární fci $v(x)$ t.ž. $v(a) = A$, $v(b) = B$ a pracujeme s $y = u + v$, kde $u \in X = \{y \in C^1[a,b];\ y(a) = 0,\ y(b) = 0\}$, což už je NLP s normou $\|u\|_{C^1} = \max\limits_{[a,b]} |u| + \max\limits_{[a,b]} |u'|$

$$\boxed{\phi(u) := F(u+v)}$$

f je fce 3 proměnných, tyto proměnné značíme x, y, z. Tj. z hraje roli y'.

Tvary Gat. diferenciálů:

$$D\Phi(u;h) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')\,h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')\,h'\,dx \qquad (u,h\in X,\ y=u+v)$$

$$D^2\Phi(u;h,h) = \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,y')\,h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,y')\,hh' + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')(h')^2\,dx$$

<u>Euler-Lagrangeova rovnice</u> Nechť $y_0\in M$ je stac. bod funkcionálu F.

Pak funkce $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(x,y_0(x),y_0'(x))$ je spojitě diferencovatelná na $[a,b]$ a

$y_0(x)$ splňuje rovnici $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0(x),y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial z}(x,y_0(x),y_0'(x))\right]=0$ na $[a,b]$.

<u>Věta o regularitě minimizéru:</u> $f\in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^2)$, $y_0\in M$ je stac. bod F

a $x_0\in(a,b)$ je takové, že $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0(x_0),y_0'(x_0))\neq 0$. Pak $\exists\delta>0: y_0\in C^2(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

<u>Klasifikace extremál:</u>

a) Lagr. nutná podmínka: $f\in C^2$, $y_0\in M$ je minimum $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y_0,y_0')\geq 0$ na (a,b)

maximum ≤ 0

b) a je stac. bod F. Je-li okolí bodu a tak, že $D^2F(y;h,h)\geq 0\ \forall h\in X$ a $\forall y\in U_\varepsilon(a)$

$\Rightarrow$ a je bod lok. min.

c) a je stac. bod F. Je-li $d^2F(a)$ spojitý v bodě a a $\exists\alpha>0: D^2F(a;h,h)\geq\alpha\|h\|^2\ \forall h\in X$

$\Rightarrow$ a je bod lok. min.

! POZOR ! Nestačí $D^2F(a;h,h)>0\ \forall h\in X$.

Pro integrální funkcionály: • $D^2\Phi(u_0;h,h)\geq\alpha\|h\|^2_{C^1}\ \forall h$ t.ž. $\|h\|_{C^1}<\delta \Rightarrow u_0$ je bod lok. min.

• Jestliže $\exists\delta: \forall h\in X$ s vlastností $\|h\|_{C^1}<\delta$ má funkce $\varphi(t)=F(y_0+th)$ vlastnost

$\varphi''(t)\geq 0$ pro $t\in(0,1) \Rightarrow F$ má v y_0 lok. min.

Někdy může pomoci geometrická struktura

F je konvexní, jestliže $F(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)\quad \forall x,y\in M,\ \forall\lambda\in(0,1)$

Pro integrální funkcionály: ozn. $\tilde f_x(y,z):=f(x,y,z)$.

Chceme $\tilde f_x$ konvexní (nez. na x) $\Rightarrow D^2\tilde f_x$ pozitivně semidefinitní

! Každý stac. bod konvexního funkcionálu je bodem minima !

Konjugované body a Jacobiho rovnice

Nechť $D^2\Phi(u_0; h, h) = \int_a^b P(h')^2 + Qh^2 \, dx$

$P = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y_0, y_0')$

$Q = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y_0, y_0') - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y_0, y_0')$

Jacobiho rovnice : $-(Ph')' + Qh = 0$

Bod $x \in (a, b]$ je konjugovaný k bodu a, jestliže ex. netriviální řešení Jacobiho rovnice splňující $h(a) = h(x) = 0$.

Jacobiho věta : Nechť $f \in C^3([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, $y_0 \in M \cap C^2[a,b]$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y_0, y_0') > 0$ na $[a,b]$

(i) Nechť na $(a,b]$ neex. konj. bod k a. Pak y_0 je bod lok. minima F na M

(ii) Nechť y_0 je bod lok. minima F na M. Pak na (a,b) neex. konj. bod k a.

Je-li b jediný konj. bod, Jacobiho věta nám nic neříká !

1) $\phi(y) = \int_a^b y^2 + (y')^2 \, dx \qquad y \in C^1[a,b]$

$$D\phi(y;h) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_a^b y^2 + 2yth + t^2h^2 + (y')^2 + 2y'th' + t^2(h')^2 - y^2 - (y')^2 \, dx$$

$$= \lim_{t\to 0} \int_a^b 2(yh + y'h') \, dx + t \int_a^b h^2 + (h')^2 \, dx = \underline{\int_a^b 2(yh + y'h') \, dx}$$

$$D^2\phi(y;h,k) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_a^b 2(yh + tkh + y'h' + tk'h' - yh - y'h') \, dx = \underline{\int_a^b 2(kh + k'h') \, dx}$$

$$D^3\phi(y;h,k,l) = 0$$

---

2) $\phi(y) = \int_0^1 x^2(y^4 - (y')^2) \, dx \qquad y \in C^1[0,1]$

$$D\phi(y;h) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 x^2 \cdot \left[y^4 + 4y^3th + 6y^2t^2h^2 + 4yt^3h^3 + t^4h^4 - (y')^2 - 2y'th' - t^2(h')^2 - y^4 + (y')^2 \right] dx$$

$$= \int_0^1 x^2(4y^3h - 2y'h') \, dx + \lim_{t\to 0} t \int_0^1 x^2 \cdot (6y^2h^2 - (h')^2) \, dx + t^2 \int_0^1 x^2 4yh^3 \, dx + t^3 \int_0^1 h^4 \, dx$$

$$= \underline{\int_0^1 x^2(4y^3h - 2y'h') \, dx}$$

To je jediný kandidát na $dF(y)$. Je to opravdu on? Musíme ověřit z definice.

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_{C^1}} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot \left[y^4 + 4y^3h + 6y^2h^2 + 4yh^3 + h^4 - (y')^2 - 2y'h' - (h')^2 - y^4 + (y')^2 - 4y^3h + 2y'h' \right] dx$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_{C^1}} \int_0^1 x^2 \cdot \left[6y^2h^2 + 4yh^3 + h^4 - (h')^2 \right] dx = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_{C^1}} A(h)$$

$$\left| \int_0^1 x^2 \cdot (6y^2h^2 + 4yh^3 + h^4 - (h')^2) \, dx \right| \le \int_0^1 x^2 \cdot (6y^2h^2 + 4|y| \cdot |h|^3 + h^4 + (h')^2) \, dx$$

$$\le \int_0^1 x^2 \cdot (6y^2 \|h\|_{C^1}^2 + 4|y| \cdot \|h\|_{C^1}^3 + \|h\|_{C^1}^4 + \|h\|_{C^1}^2) \, dx$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_{C^1}} |A(h)| \le \lim_{h\to 0} \|h\|_{C^1} \cdot \int_0^1 x^2 (6y^2 + 4|y| \cdot \|h\|_{C^1} + \|h\|_{C^1}^2 + 1) \, dx = 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{\|h\|_{C^1}} A(h) = 0.$$

$\Rightarrow L(h) = D\phi(y;h)$ je Frechetův diferenciál.

(3) $\phi(y) = \int_0^1 x^2 \sin(\pi y) + (y')^3 + y'' y''' + y e^{-(y'')^2} \, dx \qquad y \in C^3[0,1]$

$$D\phi(y;h) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \left(x^2 \sin(\pi y + \pi t h) + (y' + t h')^3 + (y'' + t h'')(y''' + t h''') + (y + t h) e^{-(y'' + t h'')^2} \right) dx \Big|_{t=0}$$

$$= \int_0^1 x^2 \cos(\pi y + \pi t h) \cdot \pi h + 3(y' + t h')^2 \cdot h' + h''(y''' + t h''') + (y'' + t h'') h''' + h e^{-(y'' + t h'')^2} + (y + t h) \cdot e^{-(y'' + t h'')^2} \cdot (-2(y'' + t h'') \cdot h'')$$

pro $t=0$: $= \int_0^1 x^2 \cos(\pi y) \pi h + 3(y')^2 h' + h'' y''' + y'' h''' + h e^{-(y'')^2} + y e^{-(y'')^2} \cdot (-2 y'' \cdot h'') \, dx$

$$D^2\phi(y;h,k) = \frac{d}{dt} D\phi(y + tk; h) \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \int_0^1 x^2 \cos(\pi(y + tk)) \pi h + 3(y' + tk')^2 h' + h''(y''' + t k''') + (y'' + t k'') h''' + h e^{-(y'' + t k'')^2} - 2(y + tk)(y'' + t k'') \cdot h'' \cdot e^{-(y'' + t k'')^2} dx \Big|_{t=0}$$

$$= \int_0^1 -x^2 \sin \pi y \cdot \pi^2 h k + 6 y' h' k' + h'' k''' + k'' h''' - 2 h e^{-(y'')^2} \cdot y'' \cdot k'' - 2 k y'' h'' e^{-(y'')^2} - 2 y k'' h'' e^{-(y'')^2} + 4 y y'' h'' e^{-(y'')^2} \cdot y'' \cdot k'' \, dx$$

---

(4) $\phi(y_1, y_2) = \int_0^1 x y_1^2 + (y_1')^2 (y_2')^2 + (y_2')^6 \, dx \qquad (y_1, y_2) \in C^1[0,1] \times C^1[0,1]$

$$D\phi(y_1, y_2; h_1, h_2) = \frac{d}{dt} \int_0^1 x (y_1 + t h_1)^2 + (y_1' + t h_1')^2 (y_2' + t h_2')^2 + (y_2' + t h_2')^6 \, dx \Big|_{t=0}$$

$$= \int_0^1 2 x y_1 h_1 + 2 y_1' h_1' (y_2')^2 + (y_1')^2 y_2' h_2' + 6 (y_2')^5 h_2' \, dx$$

---

(5) $\phi(y) = \int_{-1}^1 x^2 (y')^2 \, dx \qquad M = \{ y \in C^1[-1,1] ; \, y(-1) = -1, \, y(1) = 1 \}$

1. varianta: Nutná podmínka: $D\phi(y;h) = 0 \quad \forall h \in X \quad (X = \{ y \in C^1[-1,1] ; \, y(-1) = y(1) = 0 \})$

$$D\phi(y;h) = \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 x^2 (y' + t h')^2 dx \Big|_{t=0} = \int_{-1}^1 2 x^2 y' h' \, dx = 0 \quad \forall h \in X$$

Du Bois-Reymond: $2x^2 y' = C \Rightarrow y' = \frac{C}{2x^2} \Rightarrow y = -\frac{C}{2} \cdot \frac{1}{x} + D$

$C \neq 0$ ... y není spojité

$C = 0$ ... $y = D$ nesplňuje okrajové podmínky

2. varianta: Využijeme nápovědu $y_a(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x/a)}{\operatorname{arctg}(1/a)}$ očividně splňuje okr. podm.

$$y_a'(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1/a)} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a}$$

$$\phi(y_a) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{a^2(\operatorname{arctg}(\frac{1}{a}))^2} \cdot \left(\frac{a^2}{a^2+x^2}\right)^2 = \frac{a^2}{(\operatorname{arctg}(\frac{1}{a}))^2} \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx \quad \begin{vmatrix} t = \frac{x}{a} \\ dt = \frac{dx}{a} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a}{(\operatorname{arctg}\frac{1}{a})^2} \int_{-1/a}^{1/a} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \text{VIZ 2. SEMESTR} = \frac{a}{(\operatorname{arctg}\frac{1}{a})^2} \left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} t - \frac{t}{1+t^2}\right)\right]_{-1/a}^{1/a}$$

$$= \frac{a}{(\operatorname{arctg}\frac{1}{a})^2} \cdot \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{a} - \frac{1/a}{1+(\frac{1}{a})^2}\right] = \frac{a}{\operatorname{arctg}\frac{1}{a}} - \frac{1}{(\operatorname{arctg}\frac{1}{a})^2} \cdot \frac{a^2}{a^2+1}$$

$a \to 0_+ \Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{1}{a} \to \pi/2 \Rightarrow \phi(y_a) \to 0.$

Zároveň očividně z definice $\phi(y) \geq 0 \ \forall y \in M$, tedy vidíme, že $\inf_{y \in M} \phi(y) = 0$.

Ovšem pokud by existoval $y_0 \in M$ t. ž. $\phi(y_0) = 0$, pak $\int_0^1 x^2 \cdot (y_0')^2\,dx = 0$

$\Rightarrow x^2 \cdot (y_0')^2 = 0 \Rightarrow y_0' = 0 \ \forall x \neq 0$

$y_0 \in C^1[-1,1] \Rightarrow$ také $y_0'(0) = 0 \Rightarrow y_0 = $ konst.

Konstanta nesplňuje okrajové podmínky.

---

6 $\phi(y) = \int_{-1}^{1} x^{2/5}(y')^2\,dx \qquad M = \{y \in C^1[-1,1];\ y(-1) = -1,\ y(1) = 1\}$

Nutná podmínka extrému: $D\phi(y;h) = 0 \quad \forall h \in X \quad (X = \{y \in C^1[-1,1];\ y(-1) = y(1) = 0\})$

$$D\phi(y;h) = \frac{d}{dt}\int_{-1}^{1} x^{2/5}(y'+th')^2\,dx \Big|_{t=0} = \int_{-1}^{1} x^{2/5}\,2y'h'\,dx = 0 \quad \forall h \in X$$

$\Rightarrow x^{2/5} y' = C \Rightarrow y' = \frac{C}{x^{2/5}} \Rightarrow y = \frac{5}{3}Cx^{3/5} + D$

$y(-1) = -1: \ -\frac{5}{3}C_1 + D = -1 \quad \Rightarrow D = 0,\ C_1 = \frac{3}{5}$

$y(1) = 1 \quad \frac{5}{3}C_1 + D = 1$

$y = x^{3/5}$ je kandidát, ale

$y \notin C^1[-1,1]$! $\Rightarrow$ Není extrém.

(7) $\phi(y)=\int_0^{2\pi}(y')^2-y^2\,dx$ $\qquad M=\{y\in C^1[0,2\pi];\ y(0)=y(2\pi)=1\}$ (7)

Tedy $f(x,y,z)=z^2-y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2\neq 0 \Rightarrow$ minimizér je C^2 a můžu ve výpočtu per partesit nebo proderivovat $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z}$ ...

$$D\phi(y;h)=\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}(y'+th')^2-(y+th)^2\,dx\Big|_{t=0}=\int_0^{2\pi}2y'h'-2yh\,dx\underset{\text{per partes}}{=}\int_0^{2\pi}-2y''h-2yh\,dx=0$$

$\Rightarrow y''+y=0$. To je přesně Eul.-Lagr. rce, protože

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}&=-2y\\ \frac{\partial f}{\partial z}&=2z\\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')\right)&=2y''\end{aligned}\right\}-2y-2y''=0$$

$\lambda^2+1=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\pm i$

$\Rightarrow y=C_1\sin x+C_2\cos x$.

$$\left.\begin{aligned}y(0)=1&:\ C_2=1\\ y(2\pi)=1&:\ C_2=1\end{aligned}\right\}\ \underline{y=\cos x+C\sin x}\ \text{pro lib. } C\in\mathbb{R}.$$

(8) $\phi(y)=\int_0^1 y^2(x^n-y)\,dx$, $n\in\mathbb{N}$ velké, $\quad M=\{y\in C^1[0,1];\ y(0)=y(1)=0\}$

a) $f(x,y,z)=y^2(x^n-y)$ ... nezávisí na z. Eul.-Lagr. tak je prostě $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ tj.

$$2y(x^n-y)-y^2=0\iff 2yx^n-3y^2=0$$
$$y\cdot(2x^n-3y)=0$$

$\nearrow y_0\equiv 0$

$\searrow y=\frac{2}{3}x^n$ ... nesplňuje $y(1)=0$.

b) $D\phi(y;h)=\frac{d}{dt}\int_0^1(y+th)^2(x^n-(y+th))\,dx\Big|_{t=0}$

$$=\int_0^1 2y(x^n-y)\cdot h-y^2h\,dx=\int_0^1(2yx^n-3y^2)h\,dx$$

$$D^2\phi(y;h,h)=\frac{d}{dt}\int_0^1\left(2(y+th)x^n-3(y+th)^2\right)h\,dx\Big|_{t=0}=\int_0^1(2hx^n-6yh)h=\int_0^1(2x^n-6y)h^2\,dx$$

$D^2\phi(y_0;h,h)=\int_0^1 2x^nh^2\,dx\geq 0$ protože $x^n\geq 0$ a $h^2\geq 0$.

Navíc, je-li $h\in M$, $h\neq 0$ pak ex. bod x_0 a jeho δ-okolí, že $h\neq 0$ na $U_\delta(x_0)$ a $\int_0^1 2x^nh^2\neq 0 \Rightarrow >0$.

c) Potřebujeme najít funkce $y_1^\varepsilon(x)$ a $y_2^\varepsilon(x)$ t.ž. $\phi(y_1^\varepsilon)<0\ \ \forall\varepsilon>0$
$\phi(y_2^\varepsilon)>0\ \ \forall\varepsilon>0$

a $\|y_1^\varepsilon\|_{C^1},\|y_2^\varepsilon\|_{C^1}<\varepsilon$

tj. $\sup_{[0,1]}|y_1^\varepsilon|+\sup_{[0,1]}|(y_1^\varepsilon)'|<\varepsilon$

y_2 snadno, libovolná malá záporná fce splňující okr. podmínky, např. $y_2^\varepsilon(x)=-\varepsilon\cdot x\cdot(1-x)$

$$\phi(y_2^\varepsilon)=\int\underbrace{(y_2^\varepsilon)^2}_{>0}\cdot\underbrace{(x^n+\varepsilon x(1-x))}_{>0}dx\ ✓$$

y_1 je těžší, ~~[illegible]~~

Funguje $y_1^\varepsilon(x)=-x^n+\varepsilon^n$ na intervalu $\left(\frac{\varepsilon}{10},\frac{9\varepsilon}{10}\right)$, $y_1^\varepsilon\geq 0$ na $(\varepsilon,1)$ a hladce napojeno s bodem $y_1^\varepsilon(0)=0$.

9 $\Phi(y) = \int_1^2 x(y')^4 - 2y(y')^3 \, dx$ $\quad y(1)=0,\ y(2)=1$

$f(x,y,z) = xz^4 - 2yz^3$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 12(xz^2 - yz)$ $\quad$ Pro regularitu chceme $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \neq 0$

$z(xz-y)=0$ $\to$ $z=0$, tj. $y'=0$ $\quad y=C$ nesplňuje O.P.

$\to$ $xz=y$, tj. $y'=\frac{y}{x} \Rightarrow y=Cx$ nesplňuje O.P.

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \neq 0 \Rightarrow$ minimizér bude C^2
a můžu proderivovat Eul.-Lagr.

EL: $-2(y')^3 - \left(4x(y')^3 - 6y(y')^2\right)' = 0$

$$-2(y')^3 - 4(y')^3 - 12x(y')^2y'' + 6(y')^3 + 12yy'y'' = 0$$

$$\Rightarrow y''y'\cdot(y-xy') = 0$$

$\Rightarrow y'=0$, $y=$ konst. nesplňuje O.P.

nebo $y=xy'$, $y=Cx$ nesplňuje O.P.

nebo $y''=0$, $y=Cx+D$. $\quad$ O.P.: $0=C+D$, $1=2C+D$ $\Rightarrow C=1,\ D=-1 \Rightarrow \underline{y_0 = x-1}$ je stac. bod

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y_0,y_0') = 12(x-(x-1)) = 12 \geq 0 \Rightarrow$ y_0 může být pouze minimum

$$D\Phi(y;h) = \frac{d}{dt}\int_1^2 x\cdot(y'+th')^4 - 2(y+th)(y'+th')^3 \, dx \Big|_{t=0} = \int_1^2 4x(y')^3h' - 2h(y')^3 - 2y\cdot 3(y')^2h' \, dx$$

$$D^2\Phi(y;h,h) = \frac{d}{dt}\int_1^2 4x(y'+th')^3h' - 2h(y'+th')^3 - 6(y+th)(y'+th')^2h' \, dx \Big|_{t=0}$$

$$= \int_1^2 12x(y')^2(h')^2 - 6h(y')^2h' - 6h(y')^2h' - 12yy'(h')^2 \, dx$$

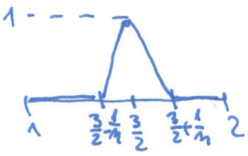
$$\Rightarrow D^2\Phi(y_0;h,h) = \int_1^2 12x(h')^2 - 12hh' - 12(x-1)(h')^2 \, dx = 12\int_1^2 (h')^2 - hh' \, dx$$

$h \in \{C^1[1,2];\ h(1)=h(2)=0\}$ $\quad \int hh' = \int \left(\frac{h^2}{2}\right)' = \frac{h^2}{2}(2) - \frac{h^2}{2}(1) = 0$!

$\Rightarrow D^2\Phi(y_0;h,h) = 12\int_1^2 (h')^2 \, dx$ $\quad$ Platí $\quad 12\int_1^2 (h')^2 \, dx \geq \alpha\left(\sup_{[1,2]}|h| + \sup_{[1,2]}|h'|\right)$??

! Neplatí, jsou fce, pro které LS $\to 0$ a PS bude konstantní.

Stačí uvážit



jako graf h'. Pro velká n půjde LS $\to 0$ zatímco $\sup|h'| = 1$ vždy.

Co konvexita? $\tilde{f}_x(y,z) = xz^4 - 2yz^3$

$$D^2\tilde{f}_x = \begin{pmatrix} 0 & -6z^2 \\ -6z^2 & 12xz^2 - 12yz \end{pmatrix}$$

$\det D^2\tilde{f}_x = -36z^4 \leq 0 \Rightarrow$ matice je obecně indefinitní !

$\Rightarrow \Phi$ není konvexní!

Musíme použít Jacobiho!

$P = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y_0, y_0') = 12$ $\qquad Q = -\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y_0, y_0') = -\frac{d}{dx}\left(-6(y_0')^2\right) = 0$

Jacobiho rovnice: $-(12h')' = 0$, tedy $h'' = 0$, $\quad h(1) = 0$

$h(x) = 0$

$\Downarrow$

$h = Ax + B \qquad \left.\begin{array}{l} 0 = A + B \\ 0 = Ax + B \end{array}\right\} \Rightarrow A = 0, B = 0$

$\Rightarrow$ neexistuje konjugovaný bod na $(1, 2] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $y_0 = x - 1$ je minimum !

(10) DÚ