Sada příkladů 1/9

Klasický variační počet

1. Nechť $\Phi(y) = \int_a^b (y^2 + (y')^2)\,\mathrm{d}x$, $y \in C^1[a,b]$. Spočtěte Gâteauxovy diferenciály $D\Phi(y;h)$, $D^2\Phi(y;h,k)$ a $D^3\Phi(y;h,k,l)$.

2. Spočtěte první Gâteauxův a Fréchetův diferenciál funkcionálu $\Phi(y) = \int_0^1 x^2(y^4 - (y')^2)\,\mathrm{d}x$ na $C^1[0,1]$.

3. Spočtěte první a druhý Gâteauxův diferenciál funkcionálu $\Phi(y) = \int_0^1 \left[x^2\sin(\pi y) + (y')^3 + y''y''' + y\mathrm{e}^{-(y'')^2}\right]\mathrm{d}x$ na $C^3[0,1]$.

4. Spočtěte první Gâteauxův diferenciál funkcionálu $\Phi(y_1,y_2) = \int_0^1 \Big[xy_1^2 + (y_1')^2(y_2')^2 + (y_2')^6\Big]\,\mathrm{d}x$ na $C^1[0,1]\times C^1[0,1]$.

5. Ukažte, že funkcionál $\Phi(y) = \int_{-1}^1 x^2(y')^2\,\mathrm{d}x$ nemá na množině $M = \{y \in C^1[-1,1]; y(-1) = -1, y(1) = 1\}$ minimum.

   Návod: Uvažujte funkce $y_a(x) = \operatorname{arctg}(x/a)/\operatorname{arctg}(1/a)$.

6. Ukažte, že funkcionál $\Phi(y) = \int_{-1}^1 x^{\frac{2}{5}}(y')^2\,\mathrm{d}x$ nemá na množině $M = \{y \in C^1[-1,1]; y(-1) = -1, y(1) = 1\}$ minimum.

   Návod: Uvažujte řešení Euler–Lagrangeovy rovnice.

7. Najděte extremály (tj. řešení příslušné Euler–Lagrangeovy rovnice) pro funkcionál $\Phi(y) = \int_0^{2\pi}\left[(y')^2 - y^2\right]\mathrm{d}x$ na množině $M = \{y \in C^1[0,2\pi]; y(0) = y(2\pi) = 1\}$.

8. Nechť $\Phi(y) = \int_0^1 y^2(x^n - y)\,\mathrm{d}x$ pro n přirozené dostatečně velké číslo a nechť $M = \{u \in C^1[0,1]; u(0) = u(1) = 0\}$.
   a) Ukažte, že jediným řešením Euler–Lagrangeovy rovnice ležícím v množině M je $y_0 = 0$.
   b) Ukažte, že $D^2\Phi(y_0;h,h) > 0$ pro $h \in M$, $h \neq 0$.
   c) Ukažte, že y_0 není bodem extrému funkcionálu, tj. v libovolném okolí bodu y_0 (v metrice $C^1[0,1]$) existují body y_1, $y_2 \in M$ tak, že $\Phi(y_1) < \Phi(y_0) = 0 < \Phi(y_2)$.

Nalezněte extrémy následujících funkcionálů na množinách spojitě diferencovatelných funkcí až do hranice splňujících níže uvedené hraniční podmínky.

9. $\Phi(y) = \int_1^2 \left[x(y')^4 - 2y(y')^3\right] \mathrm{d}x$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$

10. $\Phi(y) = \int_2^3 \frac{x^3}{(y')^2} \mathrm{d}x$, $y(2) = 4$, $y(3) = 9$

11. $\Phi(y) = \int_0^1 \left[(y')^2 + x^2\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = -1$, $y(1) = 1$

12. $\Phi(y) = \int_0^a \left[1 - \mathrm{e}^{-(y')^2}\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$

13. $\Phi(y) = \int_0^1 y(y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = p > 0$, $y(1) = q > 0$.

V následujících úlohách hledejte minimum funkcionálu $\Phi(y)$ na spojitě diferencovatelných funkcích, splňujících dané hraniční podmínky a vazební podmínku $g(y) = const$

14. $\Phi(y) = \int_0^\pi (y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = y(\pi) = 0$, $g(y) = \int_0^\pi y^2 \mathrm{d}x = 1$

15. $\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 6$, $g(y) = \int_0^1 y \,\mathrm{d}x = 3$

16. $\Phi(y) = \int_0^1 \left[x^2 + (y')^2\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = y(1) = 0$, $g(y) = \int_0^1 y^2 \mathrm{d}x = 2$

17. $\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$, $g(y) = \int_0^1 \left[y - (y')^2\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{12}$.

Klasický variační počet - aplikace ve fyzice

18. Nechť lagrangián L nezávisí explicitně na čase, tj. $L = L(x, \dot{x})$. Ukažte, že podél libovolné extremály platí zákon zachování energie, tj.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{E(x_0(t), \dot{x}_0(t))\Big\} = 0.$$

$(E = \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L)$.

19. Nechť pro pevné $i = \{1, 2, \dots N\}$ lagrangián nezávisí na x_i. Potom podél libovolné extremály platí zákon zachování hybnosti, tj.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))\Big\} = 0.$$

20. Hamiltonův princip v klasické mechanice tvrdí, že mechanická soustava popsaná souřadnicemi q_1, q_2, ..., q_N se bude pohybovat tak, aby akce

$$S = \int_P^Q L \, \mathrm{d}t \qquad L = T(t, q, \dot{q}) - U(t, q)$$

(T, U dané funkce, reprezentující kinetickou a potenciální energii soustavy) byla stacionární, tj. bude-li vektorová funkce $q(t)$ řešit Euler–Lagrangeovy rovnice. Napište tyto rovnice.

21. Pomocí zákona zachování energie (viz výše) ukažte, že pro extremály akce S dané lagrangiánem $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$ je parametr t přirozený parametr, tj.

$$\frac{d}{dt}\Big\{\sum_{ij} g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j\Big\} = 0.$$

Sestavte Hamiltonovy rovnice pro následující funkcionály

22. $J(y_1, y_2) = \displaystyle\int_0^\pi (2y_1y_2 - 2y_1^2 + (\dot{y}_1)^2 - (\dot{y}_2)^2) \, \mathrm{d}t$

23. $J(y) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{t^2 + y^2}\sqrt{1 + (\dot{y})^2} \, \mathrm{d}t$

24. $J(y_1, y_2) = \displaystyle\int_a^b (t^2 + y_1(\dot{y}_1)^2 + y_2(\dot{y}_2)^2) \, \mathrm{d}t.$

Věta o Lagr. multiplikátorech

$f, g \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ a $y_0 \in M$ je minimizérem $F(y) = \int_a^b f(x,y,y')\,dx$ vzhledem k množině $\{y \in M;\ G(y) = \mu\}$, kde $G(y) = \int_a^b g(x,y,y')\,dx$.

Nechť $dG(y_0) \neq 0$. Potom $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.ž. $DF(y_0;h) - \lambda DG(y_0;h) = 0 \quad \forall h \in X$.

---

(11) $\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 + x^2\,dx \qquad y(0) = -1,\ y(1) = 1$

$f(x,y,z) = z^2 + x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 \geq 0 \Rightarrow$ regularita minimizéru

Navíc $\tilde{f}_x(y,z) = x^2 + z^2$, $D^2\tilde{f}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ je poz. semidef.

$(v \cdot D^2\tilde{f}_x v = 2v_2^2 \geq 0 \quad \forall v = (v_1, v_2))$

$\Rightarrow \Phi$ je konvexní fcionál.

Eul.-Lagr: $-\frac{d}{dx}(2y') = 0$, tj. $y'' = 0$, $y = Ax + B$ $\qquad \left.\begin{array}{l} -1 = B \\ 1 = A + B \end{array}\right\}$ $\underline{y = 2x - 1 \text{ je lok. min.}}$

---

(12) $\Phi(y) = \int_0^a 1 - e^{-(y')^2}\,dx \qquad y(0) = 0,\ y(a) = b$

$f(x,y,z) = 1 - e^{-z^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(2ze^{-z^2}) = e^{-z^2}\cdot(2 - 4z^2)$ bude nenulové pro

$(y')^2 \neq \frac{1}{2}$, tj. $y \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x + C$

O.P.: problém pro $b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$!

Eul.-Lagr. $\frac{d}{dx}(2ze^{-z^2}) = 0$, tj.

$2y'e^{-(y')^2} = C$

Pro $b \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ zderivuji: $y''\cdot(2 - 4(y')^2)\cdot e^{-(y')^2} = 0 \Rightarrow y'' = 0$ nebo $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x + C$

nesplňuje O.P.

$\left.\begin{array}{l} y = Ax + B \\ B = 0 \\ A = b/a \end{array}\right\}$ $\underline{y_0 = \frac{b}{a}x}$

$D^2\tilde{f}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-z^2}(2 - 4z^2) \end{pmatrix}$ není ani poz semidef ani neg semidef

Nasadíme Jacobiho: $P = e^{-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\cdot\left(2 - 4\left(\frac{b}{a}\right)^2\right) \qquad Q = 0$

Je-li $\frac{b}{a} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, tak $P = 0$ a postup nefunguje. Pro $\frac{b}{a} \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\left.\begin{array}{l} h'' = 0 \\ h(0) = 0 \\ h(x) = 0 \end{array}\right\}$ jediné řeš. $h \equiv 0$

$\Rightarrow$ neex. konjugované body. Druh extrému určí znaménko P

$\left|\frac{b}{a}\right| < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P > 0$ a $y_0 = \frac{b}{a}x$ je lok. minimum

$\left|\frac{b}{a}\right| > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P < 0$ a $y_0 = \frac{b}{a}x$ je lok. maximum

Pro $\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ celá teorie selhává

(13) $\Phi(y) = \int_0^1 y(y')^2\,dx \qquad y(0)=p,\ y(1)=q \quad ,\ p,q>0$

$f(x,y,z) = yz^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2y \neq 0$ pro dané okr. podmínky $\Rightarrow$ regularita

Eul.-Lagr: $(y')^2 - \frac{d}{dx}(2yy') = 0$, tj. $(y')^2 - 2(y')^2 - 2yy'' = 0$

$-(y')^2 - 2yy'' = 0$

Je-li $p=q$, pak $y=p=q$ je očividné řešení

Pro $p\neq q$ nemůžu mít konst. řešení. Dle minulého semestru hledám řešení ve tvaru $y' = p(y) \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p(y)$

Dosadím: $2y\frac{dp}{dy}p(y) = -p^2(y)$ ... rovnice 1. řádu pro $p(y)$

Navíc vím $p(y)\neq 0$ (nechť ještě $y\neq 0$) $\Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int -\frac{dy}{2y} \Rightarrow \ln p = -\frac{1}{2}\ln y + C \Rightarrow p = Cy^{-1/2}$

Zpět k $y' = p(y) = Cy^{-1/2}$ $\qquad \underbrace{\int y^{1/2}dy}_{=\frac{2}{3}y^{3/2}} = \int C\,dx = Cx + D$

$y = (\tilde{C}x + \tilde{D})^{2/3}$

$y(0) = p \Rightarrow \tilde{D} = p^{3/2}$

$y(1) = q \Rightarrow \tilde{C} + \tilde{D} = q^{3/2} \Rightarrow \tilde{C} = q^{3/2} - p^{3/2}$ $\qquad \Rightarrow \underline{y_0 = \left(q^{3/2}x + p^{3/2}(1-x)\right)^{2/3}}$

(to pokrývá i případ $p=q$!)

$D^2\tilde{f}_x = \begin{pmatrix} 0 & 2z \\ 2z & 2y \end{pmatrix}$ není pozsemidef ani negsemidef

$p=q$: $P>0,\ Q=0$. není konj. bod, $\underline{y_0=p=q \text{ je lok. min}}$

$\Rightarrow$ Jacobi $\qquad P = 2y_0 = 2\left(q^{3/2}x + p^{3/2}(1-x)\right)^{2/3}$

$Q = -\frac{d}{dx}(2y_0') = -2y_0'' = \frac{4}{9}\left(q^{3/2}x + p^{3/2}(1-x)\right)^{-4/3}\cdot\left(q^{3/2}-p^{3/2}\right)^2$

Ozn $f(x) = q^{3/2}x + p^{3/2}(1-x)$

$-\left(2f(x)^{2/3}\cdot h'\right)' + \frac{4}{9}f(x)^{-4/3}\cdot(q^{3/2}-p^{3/2})^2 h = 0$

$-2f(x)^{2/3}h'' - \frac{4}{3}f(x)^{-1/3}(q^{3/2}-p^{3/2})\cdot h' + \frac{4}{9}f(x)^{-4/3}(q^{3/2}-p^{3/2})^2 h = 0 \quad /\cdot f(x)^{4/3}$

$-2f(x)^2h'' - \frac{4}{3}f(x)(q^{3/2}-p^{3/2})h' + \frac{4}{9}(q^{3/2}-p^{3/2})^2 h = 0 \quad /\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)$

$9f(x)^2h'' + 6f(x)(q^{3/2}-p^{3/2})h' - 2(q^{3/2}-p^{3/2})^2 h = 0$

f je lineární, to se hodí. Nová neznámá fce $\tilde{h}(f) = h(x(f))$, kde $x(f) = \frac{f - p^{3/2}}{q^{3/2}-p^{3/2}}$

Odtud $\tilde{h}' = h'(x)\cdot x' = h'\cdot\frac{1}{q^{3/2}-p^{3/2}}$ a $\tilde{h}'' = h''\cdot\frac{1}{(q^{3/2}-p^{3/2})^2}$

$\rightarrow 9f^2\tilde{h}'' + 6f\tilde{h}' - 2\tilde{h} = 0$. To je Eulerova dif. rovnice, $f>0$

$\Rightarrow f = e^{\xi}$; $z(\xi) = \tilde{h}(f(\xi))$

$\Rightarrow z'(\xi) = \tilde{h}'f$, $z''(\xi) = \tilde{h}''\cdot f^2 + \tilde{h}'\cdot f$

$9z''(\xi) - 3z'(\xi) - 2z(\xi) = 0$

$9\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{18} = \frac{3 \pm 9}{18} = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

$z(\xi) = C_1 e^{2/3\,\xi} + C_2 e^{-1/3\,\xi} \Rightarrow \underbrace{C_1 f^{2/3} + C_2 f^{-1/3}}_{\tilde{h}(f)} \Rightarrow \underbrace{C_1\left(q^{3/2}x + p^{3/2}(1-x)\right)^{2/3} + C_2\left(q^{3/2}x + p^{3/2}(1-x)\right)^{-1/3}}_{h(x)}$

Hledám na intervalu $(0,1]$, $h(0)=0$, $h(x)=0$ $\quad h(0)=0: \; C_1 p + C_2 p^{-1/2} = 0$

$\Rightarrow C_2 = -C_1 p^{3/2}$

$\Rightarrow h(x) = C_1 \cdot \left[\left(q^{3/2}x + p^{3/2}(1-x)\right)^{2/3} - p^{3/2} \cdot \left(q^{3/2}x + p^{3/2}(1-x)\right)^{-1/3}\right]$

Můžeme mít $h(x)=0$ jinak než $h \equiv 0$?

$f^{2/3} = p^{3/2} f^{-1/3} \Rightarrow f = p^{3/2}$, to jest $q^{3/2}x + p^{3/2}(1-x) = p^{3/2}$

tedy $(q^{3/2} - p^{3/2})x = 0$ Nelze!

$\Rightarrow$ neex. konjugovaný bod a $y_0 = \left(q^{3/2}x + p^{3/2}(1-x)\right)^{2/3}$ je lok. min. !

---

(14) $\Phi(y) = \int_0^\pi (y')^2\, dx \qquad y(0) = y(\pi) = 0 \qquad G(y) = \int_0^\pi y^2\, dx = 1$

Nutná podmínka: $dG \neq 0$: $DG(y;h) = \int_0^\pi 2yh\, dx = 0 \Leftrightarrow 2y = 0$, tedy $y = 0$.

To ale nesplňuje podmínku vazby $G(y)=1$, takže OK.

$D\Phi(y;h) - \lambda DG(y;h) = \int_0^\pi 2y'h' - 2\lambda yh\, dx = 0$.

Navíc $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 \neq 0$ $\Rightarrow$ regularita $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ můžeme per partes

$\Rightarrow \int_0^\pi (y'' + \lambda y)h\, dx = 0 \Rightarrow y'' + \lambda y = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow y = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x$

Okr. podmínky: $y(0)=0$: $C_2 = 0$

$y(\pi) = 0$: $0 = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\pi$ $\to$ $C_1 = 0$, ale to nesplňuje $G(y)=1$; $\to$ $\sqrt{\lambda} = k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y_k = C \sin kx$

(ve skutečnosti $k = 1, 2, \dots$)

Vazba: $\left.\begin{array}{l} \int_0^\pi C^2 \sin^2(kx)\, dx = 1 \\ \quad \| \\ C^2 \cdot \frac{\pi}{2} \end{array}\right\}$ $C^2 = \frac{2}{\pi} \Rightarrow C = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ $\Rightarrow \boxed{y_k = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx}$

Je to extrém a jaký? $\quad f - \lambda g = z^2 - k^2 y^2 \to D^2(f - \lambda g)_x = \begin{pmatrix} -2k^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det < 0$

$\Rightarrow$ nevíme nic, není konvex ani konkáv.

Jacobi: $P = 2$, $Q = -2k^2$

$\Rightarrow 2h'' + 2k^2 h = 0 \to h'' + k^2 h = 0 \Rightarrow h = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \quad h(0)=0,\ h(x)=0$

$h(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$. Kdy je $\sin kx = 0$?

$k=1 \Rightarrow x = \pi \Rightarrow$ věta nic neříká. $k \geq 2 \Rightarrow \exists x \in (0,\pi)$ t.ž. $\sin kx = 0 \Rightarrow y_k$ není minimum (*)

Jediné minimum může být $y_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$, ale nemáme prostředky, jak to ověřit. Víme $\phi(y_1) = 1$. (4)

(*) Není minimum pro $F-\lambda G$, ale nevíme nic o minimu pro F s vazbou G

(15) DÚ

(16) $\phi(y) = \int_0^1 x^2 + (y')^2\,dx \qquad y(0) = y(1) = 0 \qquad G(y) = \int_0^1 y^2\,dx = 2$

Nutná podmínka: $DG(y;h) = \int_0^1 2yh \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$ OK, protože $G(y=0) = 0 \neq 2$.

$\phi - \lambda G = \int_0^1 x^2 + (y')^2 - \lambda y^2\,dx \qquad \frac{\partial^2(f-\lambda g)}{\partial z^2} = 2 > 0 \Rightarrow$ regularita

$D(\phi-\lambda G)(y;h) = \int_0^1 2y'h' - 2\lambda yh = 0 \Rightarrow y'' + \lambda y = 0 \Rightarrow y = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x$

Okr. podm.: $C_1 = 0$

$\Rightarrow y = C_2\sin\sqrt{\lambda}x$

$y(1) = 0: \sin\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k\pi,\ k \in \mathbb{N}$

$\lambda = k^2\pi^2$

$\Rightarrow y = C_2\sin k\pi x$

Vazba: $2 = \int_0^1 C_2^2\sin^2(k\pi x)\,dx = \frac{1}{2}C_2^2 \Rightarrow C_2 = \pm 2$

$\Rightarrow y = \pm 2\sin k\pi x \qquad f - \lambda g = x^2 + z^2 - \lambda y^2 \Rightarrow D^2(f-\lambda g)_x = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det < 0$

$\Rightarrow$ není konvex ani konkáv.

Jacobi: $\left.\begin{array}{l} P = 2 \\ Q = -2k^2\pi^2 \end{array}\right\}\ 2h'' + 2k^2\pi^2 h = 0$

$h'' + k^2\pi^2 h = 0 \qquad$ Opět $h = C_1\cos k\pi x + C_2\sin k\pi x$

$h(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$h(x) = 0$ pro $x \in (0,1]$

$\Rightarrow \sin k\pi x = 0$

pro $k = 1$ mám jen $x = 1$

pro $k \geq 2$ ex. body uvnitř $(0,1]$

$\Rightarrow$ Opět mám naše teorie neposkytuje dostatek informací k rozhodnutí.

(17) $\phi(y) = \int_0^1 (y')^2\,dx \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 1/4,\ G(y) = \int_0^1 y - (y')^2\,dx = \frac{1}{12}$

Nutná podmínka: $DG(y;h) = \int_0^1 h - 2y'h' = 0 \Rightarrow 2y'' + 1 = 0 \Rightarrow y'' = -1/2$

$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{4} + Ax + B$

$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0: B = 0 \\ y(1) = 1/4: \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + A \Rightarrow A = 1/2 \end{array}\right\}\ \underline{y = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}}$

V bodě $y = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$ nelze používat větu o Lagr. multiplik.

$G(y) = \int_0^1 -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 -\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{4}\,dx = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{-2+6-3}{12} = \frac{1}{12}$!

Mimo daný bod: $(\Phi - \lambda G)(y) = \int_0^1 -\lambda y + (1+\lambda)(y')^2 \, dx$

$$\frac{\partial^2(f-\lambda g)}{\partial z^2} = 1+\lambda \neq 0 \text{ pro } \lambda \neq -1 \Rightarrow \text{tam bude regularita}$$

$$D(\Phi - \lambda G)(y;h) = \int_0^1 -\lambda h + (1+\lambda)\cdot 2y'h' \, dx$$

$$\Rightarrow 2(1+\lambda)y'' + \lambda = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{\lambda}{2(1+\lambda)} \quad (\text{máme } \lambda \neq -1 \,!)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{\lambda}{4(1+\lambda)}x^2 + Ax + B. \text{ Dále ozn. } \alpha = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

$$\text{tj. } y = -\frac{\alpha}{4}x^2 + Ax + B$$

Okr. podm.: $y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$$y(1) = 1/4 \Rightarrow \frac{1}{4} = -\frac{\alpha}{4} + A \Rightarrow A = \frac{1+\alpha}{4} \Rightarrow y = \frac{-\alpha x^2 + (1+\alpha)x}{4}$$

Spočítáme $G(y) = \int_0^1 -\frac{\alpha x^2}{4} + \frac{(1+\alpha)x}{4} - \left(-\frac{\alpha x}{2} + \frac{1+\alpha}{4}\right)^2 dx$

$$= \left[-\frac{\alpha x^3}{12} + \frac{(1+\alpha)x^2}{8} - \frac{\alpha^2 x^3}{12} + \frac{\alpha(1+\alpha)x^2}{8} - \frac{(1+\alpha)^2}{16}x\right]_0^1$$

$$= -\frac{\alpha}{12} + \frac{(1+\alpha)}{8} - \frac{\alpha^2}{12} + \frac{\alpha(1+\alpha)}{8} - \frac{(1+\alpha)^2}{16} = -\frac{\alpha}{12} - \frac{\alpha^2}{12} + \frac{(1+\alpha)^2}{16}$$

$$= -\frac{\alpha(1+\alpha)}{12} + \frac{(1+\alpha)^2}{16} = \frac{(1+\alpha)(-4\alpha + 3(1+\alpha))}{48}$$

$$= \frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{48}$$

Máme $G(y) = \frac{1}{12} \Rightarrow (1+\alpha)(3-\alpha) = 4$

$$\Rightarrow -\alpha^2 + 2\alpha + 3 = 4 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1. \Rightarrow \frac{\lambda}{1+\lambda} = 1 \text{ Nemá řešení!}$$

Navíc $\alpha = 1 \Rightarrow y = \frac{-x^2}{4} + \frac{x}{2}$, což je přesně bod, kde nelze větu vůbec použít.

Opět tedy nevíme nic, teorie neposkytuje odpověď, zda je nalezená fce extrémem nebo ne.

---

(18) $L = L(x, \dot{x})$, x_0 je extremála, tj. řešení E.-L. rovnic

$$E = \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N \ddot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial x_i}\dot{x}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i$$

$$= \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right)}_{\text{Toto jsou přesně E.-L. rovnice pro funkcionál } L}$$

(19) Lagrangián $L(x,\dot{x})$ nezávisí na x_i pro pevné $i \in \{1,\dots,N\}$

Podél extremály $x_0(t)$ platí E.-L. rce $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j \in \{1,\dots,N\}$

pro $j=i$ je $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0$. což jsme měli dokázat.

---

(20) Fcionál $S = \int_P^Q T(t,q,\dot{q}) - U(t,q)\, dt$ $\quad q, \dot{q}$ vektory o N souřadnicích

E.-L. rce pro S: $-\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,N\}$

neboli $\underline{\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0} \quad \forall i$

---

(21) $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$. Vzhledem k symetrii L můžeme BÚNO předpokládat, že $g_{ij} = g_{ji}$. (Pokud ne, def. $\tilde{g}_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij}+g_{ji})$)

Extremála: E.-L. pro L: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\left(\sum g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j\right)\right) = 0 \quad \forall k \in \{1,\dots,N\}$

Derivace $g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$ podle $\dot{x}_k$ je nenulová jen pokud $i=k$ nebo $j=k$ a v takových případech dostanu $\frac{d}{dt}\left(\sum_j g_{kj}\dot{x}_j + g_{ik}\dot{x}_i\right) = 0$, ze symetrie g jsou oba členy stejné

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_j g_{kj}\dot{x}_j\right) = 0 \Rightarrow \sum_j g_{kj}\ddot{x}_j = 0$ pro g_{ij} nez. na t, což potřebujeme pro ZZE.

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{ZZE: } 0 = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^N \dot{x}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} - L\right) = \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N g_{kj}\dot{x}_j\dot{x}_k}_{\text{totéž}} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j}_{\text{totéž}}\right) \\ &\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}L \; ! \quad \text{CBD.}\end{aligned}}$$

TOTO BY ÚPLNĚ STAČILO!

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N g_{ij}\ddot{x}_i\dot{x}_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N g_{ij}\dot{x}_i\ddot{x}_j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N g_{ij}\ddot{x}_i\right)}_{=0 \text{ (symetrie } g)}\dot{x}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \underbrace{\left(\sum_{j=1}^N g_{ij}\ddot{x}_j\right)}_{=0}\dot{x}_i = 0$$

Neboli jsme totéž dokázali bez ZZE jen s pomocí E.-L. rovnic pro L.

Sestavování Hamiltonových rovnic

Zadán je Lagrangián $L(t, q, \dot{q})$. E.-L. rce pro L vedou na dif. rce 2. řádu pro q.
Místo toho Hamiltonovy rce je dvojnásobek rovnic 1. řádu pro q a nově definované p.

$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t, q, \dot{q})$. Odtud budeme vyjadřovat $\dot{q}_i$ pomocí p_i

Nový fcionál: Hamiltonián $H(t, q, p) := p \cdot \dot{q} - L(t, q, \dot{q})$

kde $\dot{q}$ je dáno pomocí p ze vztahu $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

Potom E.-L. rce pro L jsou ekvivalentní Hamiltonovým rovnicím pro H:
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad i = 1, \dots, N$$

---

(22) $J(y_1, y_2) = \int_0^\pi 2y_1y_2 - 2y_1^2 + (\dot{y}_1)^2 - (\dot{y}_2)^2 \, dt$

Pro nás tedy $L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = 2q_1q_2 - 2q_1^2 + \dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2$

$p_1 := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2\dot{q}_1 \Rightarrow \dot{q}_1 = p_1/2$

$p_2 := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = -2\dot{q}_2 \Rightarrow \dot{q}_2 = -p_2/2$

$$\Rightarrow H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1 \cdot \frac{p_1}{2} + p_2 \cdot \left(-\frac{p_2}{2}\right) - 2q_1q_2 + 2q_1^2 - \left(\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{p_2}{2}\right)^2$$
$$= \frac{p_1^2}{4} - \frac{p_2^2}{4} - 2q_1q_2 + 2q_1^2$$

H. rovnice: $\dot{p}_1 = 2q_2 - 4q_1$, $\dot{p}_2 = 2q_1$; $\left.\begin{array}{l}\dot{q}_1 = \frac{p_1}{2} \\ \dot{q}_2 = -\frac{p_2}{2}\end{array}\right\}$ tyto 2 rovnice jsme už měli výše.

---

(23) $J(y) = \int_a^b \sqrt{t^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + \dot{y}^2} \, dt$, tedy $L = \sqrt{t^2 + q^2} \cdot \sqrt{1 + \dot{q}^2}$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \sqrt{t^2 + q^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}} \cdot 2\dot{q} = \frac{\dot{q}\sqrt{t^2 + q^2}}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}}$$
(vidíme, že $\operatorname{sgn} p = \operatorname{sgn} \dot{q}$)

Musíme vyjádřit $\dot{q}$ pomocí p:
$$p^2 \cdot (1 + \dot{q}^2) = \dot{q}^2(t^2 + q^2)$$
$$p^2 = \dot{q}^2(t^2 + q^2 - p^2) \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{\sqrt{t^2 + q^2 - p^2}}$$

$$H = \frac{p^2}{\sqrt{t^2 + q^2 - p^2}} - \sqrt{t^2 + q^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{p^2}{t^2 + q^2 - p^2}} = \frac{p^2 - t^2 - q^2}{\sqrt{t^2 + q^2 - p^2}} = -\sqrt{t^2 + q^2 - p^2}$$

$\Rightarrow$ H. rovnice $\dot{p} = \frac{1}{2} \frac{2q}{\sqrt{t^2 + q^2 - p^2}} = \frac{q}{\sqrt{t^2 + q^2 - p^2}}$ a $\dot{q} = \frac{p}{\sqrt{t^2 + q^2 - p^2}}$, což vidíme zde

(24) $J(y_1,y_2) = \int_a^b t^2 + y_1\dot{y}_1^2 + y_2\dot{y}_2^2 \, dt \implies L(t,q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2) = t^2 + q_1\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_2^2$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2q_1\dot{q}_1 \implies \dot{q}_1 = \frac{p_1}{2q_1}$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 2q_2\dot{q}_2 \implies \dot{q}_2 = \frac{p_2}{2q_2}$$

$$H(t,q_1,q_2,p_1,p_2) = \frac{p_1^2}{2q_1} + \frac{p_2^2}{2q_2} - t^2 - q_1\cdot\left(\frac{p_1}{2q_1}\right)^2 - q_2\left(\frac{p_2}{2q_2}\right)^2 = \frac{p_1^2}{4q_1} + \frac{p_2^2}{4q_2} - t^2$$

$\implies$ H. rce :

$$\dot{p}_1 = \frac{p_1^2}{4q_1^2} \qquad \dot{q}_1 = \frac{p_1}{2q_1}$$

$$\dot{p}_2 = \frac{p_2^2}{4q_2^2} \qquad \dot{q}_2 = \frac{p_2}{2q_2}$$