Sada příkladů 2/9

Posloupnosti a řady funkcí

Posloupnosti funkcí

Najděte obor bodové konvergence a hodnotu limity posloupnosti funkcí:

1. $$e^x \frac{\sin x \sin(2x) \ldots \sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

2. $$\frac{1+x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$$

3. $$\sin(\pi x n)$$

Zjistěte, zda na daných množinách konvergují posloupnosti funkcí stejnoměrně.

4. $$x^n - x^{n+1} \qquad \text{na } [0,1]$$

5. $$x^n - x^{2n} \qquad \text{na } [0,1]$$

6. $$\operatorname{arctg}(nx) \qquad \text{na } (0,\infty)$$

7. $$\frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad \text{na a) } \{x \in \mathbb{C}; |x| \leq \varepsilon\} \qquad \text{b) } \{x \in \mathbb{C}; |x| \geq \varepsilon\}$$

8. $$\sin(\pi x^n) \qquad \text{na } [0,1]$$

9. $$\frac{x}{n} \ln\left(\frac{x}{n}\right) \qquad \text{na a) } (0,\varepsilon) \qquad \text{b) } (\varepsilon,\infty)$$

10.
$$\sqrt[n]{1+x^n} \qquad \text{na } [0,\infty)$$

11.
$$\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n} \qquad \text{na } [0,\infty)$$

Zjistěte, zda jsou následující výroky pravdivé:

12.
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}\Big)\,\mathrm{d}x$$

13.
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^4}\Big)\,\mathrm{d}x$$

14.
$$\lim_{x\to 1^-}\Big(\lim_{n\to\infty} x^n\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to 1^-} x^n\Big)$$

POSLOUPNOSTI FUNKCÍ

Bodová konvergence: $f_n \to f$ na $\Omega \iff \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \Omega\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Stejnoměrná konvergence: $f_n \rightrightarrows f$ na $\Omega \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in \Omega\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

! Pořadí kvantifikátorů. V jednom případě hledám $n_0(x, \varepsilon)$, zatímco v druhém potřebuji $n_0(\varepsilon)$, které je univerzální pro všechny x.

Samozřejmě platí $f_n \rightrightarrows f \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f_n \to f$.

Charakterizace $\rightrightarrows$: $f_n \rightrightarrows f$ na $\Omega \iff \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$.

Lokálně stejnoměrná konvergence: $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $\Omega \iff \forall x_0 \in \Omega\ \exists \delta > 0 : f_n \rightrightarrows f$ na $U_\delta(x_0) \cap \Omega$

Platí: $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ na všech kompaktech $K \subset \Omega$.

Je-li Ω sama kompaktní, pak $\overset{loc}{\rightrightarrows}$ a $\rightrightarrows$ splývají.

Bolzano-Cauchyho podmínka pro $\rightrightarrows$: $f_n \rightrightarrows f$ na $\Omega \iff$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in \Omega\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Stejnoměrná konvergence je užitečná pro záměny limity a integrálu, limity a derivace, nebo limity v n a limity v x. Viz příslušné věty z přednášky.

---

(1) $f_n(x) = e^x \cdot \dfrac{\sin x \cdot \sin(2x) \cdot \ldots \cdot \sin(nx)}{\sqrt{n}}$

x je pevné $(x \in \mathbb{R})$: $|\sin x| \leq 1$, $|\sin 2x| \leq 1$, ..., $|\sin nx| \leq 1$

$$\Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{e^x}{\sqrt{n}} \searrow 0 \Rightarrow f_n(x) \to 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R}$$

---

(2) $f_n(x) = \dfrac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$ rozdílné chování x^n pro $|x| < 1$ a pro $|x| > 1$!

a) $|x| > 1$: $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^{2n+1}}\right)}{x^{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^{2n}}\right)} = x \cdot \dfrac{1 + \frac{1}{x^{2n+1}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} \to x$

b) $|x| < 1$: $f_n(x) \to 1$

c) $x = -1$: $f_n(-1) = 0 \Rightarrow f_n(-1) \to 0$

d) $x = 1$: $f_n(1) = 1 \Rightarrow f_n(1) \to 1$

$f_n \to f$ pro $x \in \mathbb{R}$, kde

$$f = \begin{cases} x & \text{pro } x < -1 \\ 0 & \text{pro } x = -1 \\ 1 & \text{pro } x \in (-1, 1] \\ x & \text{pro } x > 1 \end{cases}$$

3) $f_n(x) = \sin(\pi n x)$

a) $x = k \in \mathbb{Z}$: $\sin(\pi n x) = 0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

b) $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$: $x = p/q$, $q > 1$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, nesoudělná.

Pak pro $n = q$ je $\sin(\pi q x) = \sin(\pi p) = 0$

Totéž pro $n = 2q, 3q, \dots$

Ale $n = q+1$: $\sin(\pi n x) = \sin\left(\pi p + \pi \frac{p}{q}\right) = \cos \pi p \cdot \sin\left(\pi \frac{p}{q}\right)$
$= (-1)^p \cdot \sin x$

Podobně pro $n = 2q+1, 3q+1, \dots$

Mám tak 2 podposloupnosti. První tvořenou nulami, druhou ve tvaru $(-1)^k \sin x$, kde x je dané číslo. Je tak porušena B.-C. podmínka a $f_n(x)$ nemůže konvergovat pro $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Ukážeme, že množina $\{\pi n x \mod 2\pi \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ je hustá v $[0, 2\pi)$, tedy lze z ní vybrat podposloupnost konvergující k lib. prvku z $[0, 2\pi)$

Nejlepší způsob, jak studovat tuto posloupnost: $\varphi_k := e^{i\pi k x}$

Pozorování : $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow$ žádný úhel se neopakuje! (Sporem: $e^{i\pi k x} = e^{i\pi(k+l)x}$
$\Rightarrow e^{i\pi l x} = 1 \Rightarrow \pi l x = 2m\pi$
$x = \frac{2m}{l} \in \mathbb{Q}$
spor.)

pigeonhole principle

Fix $n \in \mathbb{N}$. $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ t.ž. $|\varphi_{m_1} - \varphi_{m_2}| < 1/n$

(Jinak bych měl rozmístit $m > n$ holubů do n přihrádek, aby nikde nebyli dva)

Nyní pišme $m_2 = m_1 + p$ a vytvořme posloupnost
$\tilde\varphi_1 = \varphi_{m_1}$
$\tilde\varphi_2 = \varphi_{m_1+p}$
$\tilde\varphi_3 = \varphi_{m_1+2p}$ atd.

Pak zřejmě platí $|\tilde\varphi_{k+1} - \tilde\varphi_k| < \frac{1}{n}$, tedy mám posloupnost, která kráčí jednotkovou kružnicí krokem menším než $1/n$. Tedy pro lib. $y \in [0, 2\pi)$ najdu $k \in \mathbb{N}$ tak, abych byl členem $\tilde\varphi_k$ od e^{iy} vzdálen nejvýše $1/n$.

Tento člen označím ψ_n, umím to udělat pro lib. $n \in \mathbb{N}$. Mám tak posloupnost $\{\psi_n\}$, která konverguje k e^{iy}, což jsme chtěli dokázat.

Proto pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $f_n(x)$ nemá limitu.

4) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ na $[0,1]$

Nejprve najdeme bodovou limitu $f(x)$.

$f_n(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ $\quad x \in (0,1)$: $f_n(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^n} \cdot \underbrace{(1-x)}_{\text{konst}} \Rightarrow f(x) = 0$ pro $x \in (0,1)$

$f_n(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$

Jde o stejnoměrnou konvergenci?

Ozn. $\quad \sigma_n := \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,1]} |f_n(x)| = \max_{[0,1]} |f_n(x)|$

Lok. extrémy f_n: $\quad f_n' = n \cdot x^{n-1} - (n+1)x^n = 0$. Pro $x \neq 0$: $n = (n+1)x$

$$\underline{x = \frac{n}{n+1}}$$

$$\sigma_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{(n+1)n^n - n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e^{-1}} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1}.$$

Vidíme $\sigma_n \to 0$ a proto $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$

(protože $f_n \in C^\infty$, $f_n(0) = f_n(1) = 0$ a $f_n \geq 0$ bylo vidět hned, že $x = \frac{n}{n+1}$ musí být bod maxima)

5) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ na $[0,1]$

Bodově: $\quad f_n(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ $\quad x \in (0,1)$: $f_n(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^n} \cdot \underbrace{(1 - x^n)}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ pro $x \in (0,1)$

$f_n(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$

Stejnoměrně: $\quad \sigma_n := \sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max |f_n(x)|$

$f_n' = n \cdot x^{n-1} - 2n \cdot x^{2n-1} = 0$. Pro $x \neq 0$: $\quad n = 2n x^n \Rightarrow \underline{x = \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}}$

$\sigma_n = f_n\left(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. $\quad \sigma_n \not\to 0$ a proto $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0,1]$.

Pozorování: Body maxima $\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}$ se kromadí u $x = 1 \Rightarrow$ to je problémový bod.

Skutečně, pro lib. $\delta > 0$ najdeme, že maximum na intervalu $[0, 1-\delta]$ se pro velká n bude nabývat v krajním bodě $x = 1-\delta$ a tam víme, že $f_n(1-\delta) \to 0$.

Proto $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1-\delta]$ pro lib. $\delta > 0$, neboli $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $[0,1)$.

6) DÚ

7) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ a) na $\{x \in \mathbb{C}; |x| \leq \varepsilon\}$ $(=A)$

b) na $\{x \in \mathbb{C}; |x| > \varepsilon\}$ $(=B)$

Bodová: a) $x=0$: $f_n(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$

a) i b) $x \neq 0$: $f_n(x) = \dfrac{x}{\frac{1}{n}+nx^2} \to 0$ (čitatel pevný, jmenovatel $\to \infty$) $\Big\}$ $f(x) \equiv 0$

Stejnoměrná: a) $\sigma_n = \sup\limits_{|x|\leq\varepsilon} |f_n(x)-f(x)| = \max\limits_{|x|\leq\varepsilon} |f_n(x)|$

$x \in \mathbb{C} \Rightarrow x = r\cdot e^{i\varphi}$, $r \leq \varepsilon$, $\varphi \in [0,2\pi)$ $\Rightarrow \sigma_n = \max\limits_{r\leq\varepsilon,\varphi\in[0,2\pi)} \dfrac{nr}{|1+n^2r^2e^{2i\varphi}|}$

Výraz je největší, když je jmenovatel nejmenší. Toho můžu dosáhnout, když $e^{2i\varphi} = -1$, tj. $\varphi = \pi/2$.

Pak dostanu $\dfrac{nr}{|1-n^2r^2|}$ a hned vidím problém: pro $r = \frac{1}{n}$ mám ve jmenovateli nulu.

Skutečně $f_n(x)$ není def. v bodech $x = \frac{i}{n}$. Ty se kumulují v 0, proto v případě a) je $\sigma_n = +\infty$ od dostatečně velkého n a proto $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ na množině A.

b) V tomto případě vadné body naopak pro velká n opustí množinu B a nahlédnu, že maximum z výrazu $\dfrac{nr}{|1-n^2r^2|} = \dfrac{nr}{n^2r^2-1}$ se nalézá v krajním bodě $r=\varepsilon$. Pak $\sigma_n = \dfrac{n\varepsilon}{n^2\varepsilon^2-1}$ a podobně jako ve vyšetření bodové konvergence $\sigma_n \to 0$. Proto $f_n \rightrightarrows f$ na B a tedy lze usoudit také $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

---

8) $f_n(x) = \sin(\pi x^n)$ na $[0,1]$

Bodová: $f_n(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$ $\quad x \in (0,1)$: $x^n \to 0 \Rightarrow \sin(\pi x^n) \to 0 \Rightarrow f=0$ na $(0,1)$.

$f_n(1)=0 \Rightarrow f(1)=0$

Stejnoměrná: $\sigma_n = \sup\limits_{[0,1]} |\sin(\pi x^n)-0| = \max\limits_{[0,1]} \{\sin(\pi x^n)$

$f_n' = \cos(\pi x^n)\cdot \pi n \cdot x^{n-1}$ pro $x \neq 0$ chci $\pi n \cos(\pi x^n) = 0 \Rightarrow \pi x^n = \pi/2$

$x = \sqrt[n]{1/2}$

Očividně je to bod maxima.

$\sin(\pi x^n) = \sin \pi/2 = 1 \Rightarrow \sigma_n = 1$, $\sigma_n \not\to 0 \Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0,1]$.

Body maxima se kumulují v $x=1 \Rightarrow$ lehce bychom ukázali podobně jako v předchozích případech $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $[0,1)$.

9 $f_n(x) = \frac{x}{n}\ln\left(\frac{x}{n}\right)$ a) na $(0,\varepsilon)$ $(=A)$

b) na $(\varepsilon,+\infty)$ $(=B)$

Bodově: x pevné, $n\to\infty$: $\frac{x}{n}\to 0$, platí $\lim\limits_{z\to 0_+} z\ln z = 0$ (školovací limita)

$\Rightarrow f = 0$ na $(0,\infty)$

Stejnoměrně $\sigma_n = \sup\limits_{x\in A}\left|\frac{x}{n}\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|$. Zde naopak n pevné a maximalizuji vzhledem k x.

Pro $x<n$ je $\frac{x}{n}<1$, $\ln\left(\frac{x}{n}\right)<0 \Rightarrow$ zkoumám fci $g_n(x) = -\frac{x}{n}\ln\left(\frac{x}{n}\right)$

$$g_n' = -\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\cdot\frac{1}{\frac{x}{n}}\cdot\frac{1}{n} = -\frac{1}{n}\left(\ln\frac{x}{n}+1\right)$$

$$g_n' = 0 \Rightarrow \ln\frac{x}{n} = -1 \Rightarrow \underline{x = n\cdot e^{-1}} \ (<n) \text{ ok}$$

Body maxima utíkají do ∞!

Proto $\sigma_n = \sup\limits_{x\in A}\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right| = -\frac{\varepsilon}{n}\cdot\ln\frac{\varepsilon}{n}$ a $\sigma_n\to 0$ (viz výše)

Proto $f_n \rightrightarrows f$ na $(0,\varepsilon)$

V případě b) je $\sigma_n = \sup\limits_{x\in B}\left|\frac{x}{n}\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right| = \max\left(\sup\limits_{x\in(\varepsilon,n)}\dots, \sup\limits_{x\in(n,\infty)}\right)$

Na intervalu (ε,n) máme body maxima $x = n\cdot e^{-1}$, ale $\sup\limits_{x>n}\frac{x}{n}\cdot\ln\frac{x}{n} = +\infty$,

protože sup je v tomto případě prostě limita v nekonečnu.

Proto $\sigma_n = +\infty \Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$ na (ε,∞).

Máme ale $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $[\varepsilon,\infty)$, neboli $f_n\rightrightarrows f$ na $[\varepsilon,K]$ pro $K>\varepsilon$ libovolné.

Zde naopak body maxima $x = n\cdot e^{-1}$ vycestují za $x=K$, maximum se nachází v bodě $x=K$,

a tam $f_n(K)\to 0$.

---

10 $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ na $[0,\infty)$

Máme $f_n(x) = (1+x^n)^{\frac{1}{n}} = \exp\left[\frac{1}{n}\cdot\ln(1+x^n)\right]$

Bodově: $x\le 1$: $x^n\to 0$ a $f_n(x)\to 1$

$x=1$: $f_n(1) = \sqrt[n]{2}$ a $f_n(x)\to 1$

$x>1$: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n\cdot\ln x}{1+x^n} = \ln x \Rightarrow f_n(x)\to e^{\ln x} = x$

$f(x) = 1$ pro $x\le 1$
$= x$ pro $x>1$.

Stejnoměrně: $\sigma_n := \sup\limits_{[0,\infty)}|f_n(x)-f(x)| = \max\left\{\sup\limits_{[0,1]}, \sup\limits_{(1,\infty)}\right\}$

Na $[0,1]$: $f_n(x)$ je očividně rostoucí $\Rightarrow \sup\limits_{[0,1]} f_n(x)-1 = f_n(1)-1 = \sqrt[n]{2}-1$.

Na $(1,\infty)$: $g_n(x) := f_n(x)-x$. $g_n' = \frac{1}{n}\cdot(1+x^n)^{\frac{1}{n}-1}\cdot n\cdot x^{n-1} - 1 = \frac{x^{n-1}}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}} - 1 = \left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^{1-\frac{1}{n}} - 1$

Pro pevné n je $\frac{x^n}{1+x^n} < 1$, proto $\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^{1-\frac{1}{n}} < 1$ a $g_n' < 0 \Rightarrow g_n$ je klesající na $(1,\infty) \Rightarrow \sup g_n = g_n(1) = \sqrt[n]{2}-1$. Proto $\sigma_n = \sqrt[n]{2}-1$, $\sigma_n \to 0$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,\infty)$.

---

(11) $f_n(x) = \dfrac{1+x^{n+1}}{1+x^n}$ na $[0,\infty)$

Bodově: Opět $x \in [0,1]$: $f_n(x) \to 1$, protože $x^n \to 0$ pro $x<1$

$x > 1$: $f_n(x) = x \cdot \dfrac{1+\frac{1}{x^{n+1}}}{1+\frac{1}{x^n}} \to x.$

Stejnoměrně: $\sigma_n = \sup\limits_{[0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \max\left\{\sup\limits_{[0,1]}, \sup\limits_{[1,\infty)}\right\}$

- $\sup\limits_{[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{[0,1]}\left(1-\dfrac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right) = \sup\limits_{[0,1]} \dfrac{x^n\cdot(1-x)}{1+x^n}.$

Derivace tohoto by vedla k řešení rovnice $x^{n+1}+(n+1)x-n=0$, což explicitně neumíme.

Úvaha: $\sup\limits_{[0,1]} \dfrac{1}{1+x^n} = 1 \Rightarrow \sup\limits_{[0,1]} \dfrac{x^n(1-x)}{1+x^n} \leq \sup\limits_{[0,1]} x^n\cdot(1-x)$. To už jsme řešili v příkladu 4: sup se nabývá v bodě $\frac{n}{n+1}$ a víme, že pro $n\to\infty$ jde k 0.

- $\sup\limits_{[1,\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{[1,\infty)} x - \dfrac{1+x^{n+1}}{1+x^n} = \sup\limits_{[1,\infty)} \dfrac{x-1}{1+x^n}$

Derivace opět vede k neřešitelné rovnici, ale všimneme si $\sup\limits_{[1,\infty)} \dfrac{x-1}{1+x^n} \leq \sup\limits_{[1,\infty)} \dfrac{x-1}{x^n} =$

$= \sup\limits_{x\in[1,\infty)} \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{x}\right)^n = \sup\limits_{y\in[0,1]} y^{n-1}-y^n$, což je totéž, co výše (skoro), sup se nabývá v $\frac{n-1}{n} = y$ a jde k 0 pro $n\to\infty$. Dohromady tak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,\infty)$

---

(12) $\displaystyle\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx \;\left|\begin{array}{l} t = n^2x^2 \\ dt = 2n^2x\,dx\end{array}\right| = \int_0^{n^2} \frac{1}{2n}\,\frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2n}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^{n^2} = \frac{\ln(1+n^2)}{2n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0$ ze škálovací limity.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = 0$, viz příklad 7)

$\int_0^1 0\,dx = 0$. Zjistili jsme $\lim \displaystyle\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \int_0^1 \lim \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx$, přestože $f_n \not\rightrightarrows 0$ na $(0,1)$. To sice neplyne z příkladu 7 přímo, ale lehce najdeme $\sigma_n = \sup\limits_{[0,1]} \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ se nabývá v bodě $x = \frac{1}{n}$ a má hodnotu $\sigma_n = \frac{1}{2} \not\to 0$.

13. $$\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\,dx \;\left|\; \begin{array}{l} t = nx^2 \\ dt = 2nx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{n^2} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} n^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\operatorname{arctg} n^2 = \frac{\pi}{4}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^4} = 0$ podobným argumentem jako u 7,

$\int_0^1 0\,dx = 0$. Tedy $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^4}\,dx$.

Tím také zjišťujeme, že $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$ nemohou konvergovat stejnoměrně na $[0,1]$

---

14. Pro $x<1$ je $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Proto $\lim_{x\to 1-} \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{x\to 1-} 0 = 0$.

Ale pro pevné n je $\lim_{x\to 1-} x^n = 1$ a tedy $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1-} x^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

$\Big\} \neq$.

To je protipříklad k Moore-Osgoodově větě, $\{x^n\}$ totiž nekonverguje stejnoměrně k 0 na $(0,1)$.