Posloupnosti a řady funkcí

Řady funkcí

Najděte obor absolutní a neabsolutní bodové konvergence řad funkcí:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)^n$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \mathrm{tg}\,\Big(\frac{x}{2^n}\Big)$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} \cos x$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}, \quad p \in \mathbb{R}$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}, \quad y \in \mathbb{R}_0^+$$

Zjistěte, zda řady funkcí konvergují stejnoměrně na daných intervalech:

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n \qquad \text{a) } [0,1] \quad \text{b) } \Big[0,\frac{999}{1023}\Big]$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}} \qquad \text{a) } [\epsilon,2\pi-\epsilon]\,, 0<\epsilon<\pi\,, \quad \text{b) } [0,2\pi]$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2} \qquad \text{a) } [-K,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } (-\infty,\infty)$$

11.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\Big(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\Big) \qquad \text{a) } [-K,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } (-\infty,\infty)$$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sqrt[n]{x^2} \qquad \text{a) } [0,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } [0,\infty)$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{nx},\ \alpha\in\mathbb{N}_0 \qquad \text{a) } (-\infty,-1] \quad \text{b) } [-1,0] \quad \text{c) } [0,1]$$

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{x^2+k^2})\sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}}, \quad k\in\mathbb{R} \qquad (-\infty,\infty)$$

15.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x} \qquad \text{a) } [-K,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } (-\infty,\infty)$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x\ln\Big(\frac{x}{n}\Big) \qquad \text{a) } (0,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } (0,\infty)$$

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\mathrm{e}^{-nx} \qquad \text{a) } [0,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } [0,\infty)$$

ŘADY FUNKCÍ

Definujeme $\sum_{1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows f(x) \iff s_n(x) \rightrightarrows f(x)$, kde $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

Nutná podmínka: Jestliže $\sum f_n(x) \rightrightarrows$ na Ω, pak $f_n(x) \rightrightarrows 0$ na Ω.

Weierstrassovo kritérium: Jestliže ex. číselná posl. $\{a_k\}$ t.ž. $|f_k(x)| \leq a_k$ $\forall x \in \Omega$ $\forall k \in \mathbb{N}$

a jestliže $\sum a_k < \infty$, pak $\sum f_k(x) \rightrightarrows$.

Důsledek: Mocninná řada konverguje na kruhu konvergence $|z - z_0| < R$ lokálně stejnoměrně.

Leibniz: Nechť $0 \leq f_{k+1}(x) \leq f_k(x)$ na Ω $\forall k \in \mathbb{N}$. Pak $\sum (-1)^k f_k(x) \underset{\text{na } \Omega}{\rightrightarrows} \iff f_k(x) \underset{\text{na } \Omega}{\rightrightarrows} 0$.

Definice: $\{f_k\}$ je stejně stejnoměrně omezená na Ω, jestliže $\exists K \geq 0$ t.ž.

$$|f_k(x)| \leq K \quad \forall k \in \mathbb{N} \ \forall x \in \Omega$$

Abel - Dirichlet: Nechť $\{a_k(x)\}$ je monotónní, tj. $0 \leq a_{k+1}(x) \leq a_k(x)$ $\forall x \in \Omega$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Nechť $\{b_k(x)\}$ je posloupnost.

D: Jestliže $a_k \rightrightarrows 0$ a posl. část. součtů $\{b_k(x)\}$ je stejně stejnoměrně omezená,

pak $\sum (a_k b_k)(x) \rightrightarrows$ na Ω.

A: Jestliže $\{a_k(x)\}$ je stejně stejnoměrně omezená a $\sum b_k(x) \rightrightarrows$ na Ω,

pak $\sum (a_k b_k)(x) \rightrightarrows$ na Ω.

Abelova věta (připomenutí) (+ rozšíření): Nechť $f(z) = \sum a_k z^k$ má poloměr R a $\varphi \in [0, 2\pi)$ je takové, že řada $\sum a_k z^k$ konverguje v bodě $z = Re^{i\varphi}$. Pak $\sum a_k z^k$ konverguje stejnoměrně na množině $\{te^{i\varphi};\ t \in [0, R]\}$ a fce $t \longmapsto f(te^{i\varphi})$ je spojitá na $[0, R]$.

Dále věty o záměně $\sum$ a $(\ )'$, záměně $\sum$ a $\int$

(2)

(1) $\sum_{1}^{\infty} (\ln x)^n$. To je geometrická řada s kvocientem $q = \ln x$.

Pro konvergenci tak potřebujeme $|q| < 1 \Rightarrow |\ln x| < 1 \Rightarrow \underline{x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)}$

Na tomto intervalu řada konverguje absolutně, jinde nekonverguje.

---

(2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$. Ozn $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

Nutná podmínka: $\lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\} \overset{=}{\to} 0$

Máme: a) $|x| < 1 \Rightarrow x^n \to 0$. $\left.\begin{array}{l}\text{Čitatel} \to 0 \\ \text{Jmenovatel} \to 1\end{array}\right\} \Rightarrow f_n(x) \to 0$

b) $|x| > 1 \Rightarrow x^n \to \infty$: $f_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^n} + x^n}$. Jmenovatel $\to \infty \Rightarrow f_n(x) \to 0$

$x = 1$: $f_n(1) = \frac{1}{2} \not\to 0 \Rightarrow$ nekonverguje

$x = -1$: $f_n(-1) = (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \not\to 0 \Rightarrow$ nekonverguje

Ad a): Srovnávací kritérium: $|f_n(x)| \leq |x|^n$, což konverguje $\Rightarrow$ pro $|x|<1$ řada AK.

Ad b) $|f_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{|x|^{2n}} = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n$, což konverguje $\Rightarrow$ pro $|x| > 1$ řada AK.

---

(3) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ Opět lehce vidíme, že jde o geometrickou řadu s kvocientem

$q = (-1) \cdot \frac{1-x}{1+x} = \frac{x-1}{x+1}$.

Potřebujeme $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$, tedy $|x-1| < |x+1|$. Vzdálenost od bodu $+1$ musí být menší než od -1, tedy $x > 0$!

Pro $x > 0$ řada konverguje absolutně, pro $x \leq 0$ nekonverguje vůbec.

---

(4)

(5) $\sum_{1}^{\infty} e^{-nx} \cos x = \cos x \sum_{1}^{\infty} e^{-nx} = \cos x \sum (e^{-x})^n .$

Opět vidíme geometrickou řadu, ale pozor. Máme také body, kde $\cos x = 0$ a tam sčítáme nuly a řada tak zjevně absolutně konverguje. To jsou body $x \in M = \{ \pi/2 + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \}$.

Pro $x \notin M$ o konvergenci rozhodne $\sum (e^{-x})^n$. Tedy chceme $|e^{-x}| < 1$, tj.

$e^{-x} < 1 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow x > 0$. Řada konverguje absolutně na $\mathbb{R}^+ \cup M$, jinde nekonverguje.

---

(6) $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{(x+n)^p}$, $p \in \mathbb{R}$. Problém s def. oborem pro $x \in \{-1, -2, -3, \dots\}$.

Lze vyřešit omezením se na $\sum_{n_0}^{\infty}$ pro dost velké $n_0(x)$.

Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ je $n^p \sim (x+n)^p$ pro $n \to \infty$, protože očividně

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(x+n)^p} = \lim \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^p} = 1$$, jelikož $\frac{x}{n} \to 0$ pro pevné x.

Řadu $\sum (-1)^n \frac{1}{n^p}$ známe: AK pro $p > 1$, NAK pro $p \in (0, 1]$ a nekonverguje pro $p \leq 0$.

Naše řada bude mít stejné vlastnosti na základě
- limitního srovn. kritéria pro AK ($|f_n(x)| \sim \frac{1}{n^p}$ $\forall x \in \mathbb{R}$)
- Leibnizova kritéria pro NAK ($\frac{1}{(x+n)^p}$ jde monotónně k nule $\forall x \in \mathbb{R}$ od nějakého n_0)
- porušení nutné podmínky pro $p \leq 0$.

---

(7) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n + y^n}$, $y \in \mathbb{R}_0^+$. Nejprve $y = 0$. Řadu $\sum \frac{x^n}{n}$ známe, konverguje absolutně pro $|x| < 1$ a neabsolutně pro $x = -1$. Jinde nekonverguje.

Dále $y \neq 0$: $f_n(x) = \frac{x^n}{n + y^n} = \frac{x^n}{n \cdot (1 + \frac{y^n}{n})}$ $\frac{y^n}{n}$ se chová různě pro $|y| < 1$ a pro $|y| > 1$.

a) $|y| < 1$: Pak $\frac{y^n}{n} \to 0$, tedy $1 + \frac{y^n}{n} \to 1$ a $|f_n(x)| \sim \frac{|x|^n}{n}$. Řada se tak chová stejně jako $\sum \frac{x^n}{n}$, tj. $|x| < 1$ AK (dle LSK), $x = -1$ K (Leibniz, $n + y^n$ je monotónní od dost. velkého n_0) $x = 1$ DIV (srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{n}$), $|x| > 1$ nekonverguje, je porušena nutná podmínka

4

b) $y=1$: $\sum \frac{x^n}{n+1}$ se chová úplně stejně jako $\sum \frac{x^n}{n}$,

tedy AK pro $|x|<1$, NAK pro $x=-1$, DIV pro $x=1$, nekonv. pro $|x|>1$.

c) $y=-1$: $\sum \frac{x^n}{n+(-1)^n}$: zde lehce AK pro $|x|<1$ např. odhadem shora řadou $\sum |x|^n$.

$x=-1$: nelze přímo použít Leibnitz, $\frac{1}{n+(-1)^n}$ není monotónní.

Trik : $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n \cdot (n-(-1)^n)}{n^2-1} = \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{n}{n^2-1}}_{\text{konv.}} - \underbrace{\frac{1}{n^2-1}}_{\text{konv.}}$ $\Rightarrow$ řada konverguje neabsolutně.

$x=1$: řada diverguje (srovnání s harmonickou řadou $\sum \frac{1}{n+1}$)

$|x|>1$: řada nekonverguje, porušena nutná podmínka.

d) $|y|>1$: Zde y^n je větší než n a chování jmenovatele tak určuje y^n.

$f_n(x) = \frac{x^n}{n+y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{n}{y^n}\right)}$. Zde $\frac{n}{y^n} \to 0$, proto $1+\frac{n}{y^n} \to 1$

a řada se chová jako $\sum \left(\frac{x}{y}\right)^n$.

Proto dostáváme : $|x|<|y| \Rightarrow$ řada konverguje absolutně

$|x| \geq |y| \Rightarrow$ řada nekonverguje, je porušena nutná podmínka.

[V zadání bylo $y \geq 0$, takže případ c) je irelevantní]

---

8 $\sum_{1}^{\infty} (1-x)x^n$ na a) $[0,1]$
b) $[0, \frac{999}{1023}]$

Z minula víme, že $f_n(x) = (1-x)x^n = x^n - x^{n+1} \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$, tedy i na $[0, \frac{999}{1023}]$.

Je tedy splněna nutná podmínka.

Jde o teleskopickou řadu : Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_n(x)$. Pak $s_1 = x - x^2$
$s_2 = x - x^2 + x^2 - x^3 = x - x^3$
$s_3 = x - x^4$ atd.

$s_n(x) = x - x^{n+1}$ pro $x<1$ jde x^{n+1} k nule

$\Rightarrow \lim s_n(x) = s(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in [0,1) \\ 0 & \text{pro } x=1 \end{cases}$. $s_n(x) \not\rightrightarrows s(x)$ na $[0,1]$, jinak by $s(x)$ musela být spojitá.

$\Rightarrow$ Řada nekonverguje stejnoměrně na $[0,1]$

V případě b) : $\sigma_n = \sup_{[0,\frac{999}{1023}]} |s_n(x) - x| = \sup_{[0,\frac{999}{1023}]} x^{n+1} = \left(\frac{999}{1023}\right)^{n+1}$, $\sigma_n \to 0$

$\Rightarrow$ Řada konverguje stejnoměrně na $[0, \frac{999}{1023}]$.

(9) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}}$ na a) $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$
b) $[0, 2\pi]$

Nutná podmínka: $f_n(x) \to 0$ bodově $\forall x \in \mathbb{R}$ (čitatel omezený, jmenovatel $\to \infty$)

Stejnoměrně? $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+x^2}} \leq \frac{1}{n^{2/3}} \to 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$.

Vidíme $\sin nx$, chceme použít Dirichleta. Pro stejnoměrnou konvergenci potřebujeme více než jen omez. část. součty, potřebujeme stejnou stejnoměrnou omezenost č.s.

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} \sin nx = \frac{1}{2i} \sum_{1}^{N} e^{inx} - e^{-inx} = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} \cdot \frac{1-e^{iNx}}{1-e^{ix}} - e^{-ix} \frac{1-e^{-iNx}}{1-e^{-ix}}\right)$$

$$\Rightarrow |S_N| \leq \frac{1}{|2i|} \cdot \left(|e^{ix}| \cdot \frac{|1-e^{iNx}|}{|1-e^{ix}|} + |e^{-ix}| \cdot \frac{|1-e^{-iNx}|}{|1-e^{-ix}|}\right) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{|1-e^{ix}|} + \frac{2}{|1-e^{-ix}|}\right)$$

Potřebuji být mimo $x = 2k\pi$, aby jmenovatel nešel k nule.

Na $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ mám $|S_N| \leq \frac{1}{|1-e^{i\varepsilon}|} + \frac{1}{|1-e^{-i\varepsilon}|}$ ... stejně stejnoměrně omezené část. součty

$a_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+x^2}} \leq \frac{1}{n^{2/3}} \to 0$, tedy $a_n \rightrightarrows 0$ na $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ (i na $[0, 2\pi]$)

$\Rightarrow$ Dle Dirichleta na a) řada konverguje stejnoměrně.

V bodě $x=0$ je ale problém, přestože $\sin nx \equiv 0$.

B.-C. podmínka pro $\rightrightarrows$: $\forall \varepsilon\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall p\ \forall x : \left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$

Ale co se stane, když $p = n$ a $x = \frac{1}{2n}$? $\sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin kx}{\sqrt[3]{k^2+\left(\frac{1}{2n}\right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin kx}{k^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sum_{n}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{k}{2n}\right)}{k^{2/3}}$

$k^2 + \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \leq 2k^2$

$\frac{k}{2n}$ nabývá mezi $k=n$ a $k=2n$ hodnot mezi $\frac{1}{2}$ a 1. Zároveň $\sin\left(\frac{1}{2}\right) \leq \sin\left(\frac{k}{2n}\right) \leq \sin(1)$, tedy $\sin\left(\frac{k}{2n}\right) \geq \sin\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{k}{2n}\right)}{k^{2/3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin\frac{1}{2}}{k^{2/3}} \geq \frac{\sin 1/2}{\sqrt[3]{2}} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{(2n)^{2/3}} = \frac{\sin 1/2}{2} \cdot \frac{n}{n^{2/3}} = \frac{\sin\frac{1}{2}}{2} \cdot n^{1/3}$$

To jistě není $< \varepsilon \Rightarrow$ Je porušena B.-C. podmínka a řada nekonverguje stejnoměrně na $[0, 2\pi]$