Sada příkladů 3/9

Posloupnosti a řady funkcí

Řady funkcí

Najděte obor absolutní a neabsolutní bodové konvergence řad funkcí:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)^n$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \mathrm{tg}\,\Big(\frac{x}{2^n}\Big)$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} \cos x$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}, \quad p \in \mathbb{R}$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}, \quad y \in \mathbb{R}_0^+$$

Zjistěte, zda řady funkcí konvergují stejnoměrně na daných intervalech:

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n \qquad \text{a) } [0,1] \quad \text{b) } \Big[0, \frac{999}{1023}\Big]$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}} \qquad \text{a) } [\epsilon, 2\pi-\epsilon]\,, 0<\epsilon<\pi\,, \quad \text{b) } [0,2\pi]$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2} \qquad \text{a) } [-K,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } (-\infty,\infty)$$

11.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\Big(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\Big) \qquad \text{a) } [-K,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } (-\infty,\infty)$$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sqrt[n]{x^2} \qquad \text{a) } [0,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } [0,\infty)$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty}x^\alpha \mathrm{e}^{nx},\ \alpha\in\mathbb{N}_0 \qquad \text{a) } (-\infty,-1] \quad \text{b) } [-1,0] \quad \text{c) } [0,1]$$

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{x^2+k^2})\sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}}, \quad k\in\mathbb{R} \qquad (-\infty,\infty)$$

15.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x} \qquad \text{a) } [-K,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } (-\infty,\infty)$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x\ln\Big(\frac{x}{n}\Big) \qquad \text{a) } (0,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } (0,\infty)$$

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\mathrm{e}^{-nx} \qquad \text{a) } [0,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } [0,\infty)$$

(10) $\sum_1^\infty \frac{x}{1+n^4x^2}$ na intervalu a) $[-K,K]$, $K>0$
b) $(-\infty,\infty)$

1) nutná podmínka pro stejnoměrnou konvergenci: $f_n \rightrightarrows 0$. Je to tak?
pevné x, $n\to\infty$: čitatel pevný, jmenovatel $\to\infty$ $\Rightarrow$ $f_n\to 0$ bodově.

$\sigma_n = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$.
$= \sup_{x\in I} \frac{|x|}{1+n^4x^2}$ sudá fce, stačí zkoumat $x>0$

$f_n'(x) = \frac{(1+n^4x^2)-x\cdot(2xn^4)}{(1+n^4x^2)^2} = \frac{1-x^2n^4}{(1+n^4x^2)^2} = 0 \Rightarrow x^2n^4=1$
(pro $x>0$:) $x=\frac{1}{n^2}$ ($x>0$)

$f_n(x=\frac{1}{n^2}) = \frac{1/n^2}{1+n^4\cdot\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2n^2}$

$\boxed{f_n(0)=0,\ \lim_{x\to\infty} f_n(x)=0 \Rightarrow \text{max je ve stac. bodě.}}$

$\sigma_n = \frac{1}{2n^2} \to 0$

(pro pevné K se body $x=\frac{1}{n^2}$ dostanou do intervalu $[-K,K]$)

Nutná podmínka splněna $\Rightarrow$ pokračujeme

2) Info, co už máme, nám stačí k rozhodnutí o konvergenci, protože $\sigma_n \sim \frac{1}{n^2}$, což je dostatečně vysoká mocnina, protože $\sum\frac{1}{n^2}$ konverguje.
Proto $\sum|f_n(x)| \le \sum \max|f_n(x)| = \sum f_n(\frac{1}{n^2}) = \sum\frac{1}{2n^2}$ konverguje,
a tedy Weierstrassovým kritériem $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $[-K,K]$ i na $(-\infty,\infty)$.

---

(11) $\sum_2^\infty \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ a) $[-K,K]$, $K>0$
b) $(-\infty,\infty)$

1) nutná podmínka: x pevné, $n\to\infty$: $\frac{x^2}{n\ln^2 n}\to 0 \Rightarrow f_n\to 0$ bodově.
$\sigma_n = \sup_{x\in I} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$.
$f_n(0)=0$
$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = +\infty$!!
Na intervalu $(-\infty,\infty)$ je $\sigma_n=+\infty$
a proto $f_n \not\rightrightarrows 0$ na $(-\infty,\infty)$.
(a tedy $\sum f_n \not\rightrightarrows$)

Dále zkoumáme jen $[-K,K]$!!
$f_n' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}}\cdot\frac{2x}{n\ln^2 n} = 0 \iff x=0$. To je jediný stacionární bod, je to očividně minimum !!
$\Rightarrow \sigma_n = f_n(\pm K) = \ln\left(1+\frac{K^2}{n\ln^2 n}\right) \to 0$ a $f_n\rightrightarrows 0$ na $[-K,K]$

2) Stejnoměrná konvergence řady: Opět: víme, že $\ln\left(1+\frac{K^2}{n\ln^2 n}\right) \sim \frac{K^2}{n\ln^2 n}$ a $\sum_2^\infty \frac{K^2}{n\ln^2 n}$ konv.
Můžeme tak použít Weierstrasse: $\sum\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \le \sum\ln\left(1+\frac{K^2}{n\ln^2 n}\right)$.
To je číselná řada, která konverguje (LSK s řadou $\sum\frac{K^2}{n\ln^2 n}$ a ta integrálním kritériem).
Proto $\sum f_n \rightrightarrows$ na $[-K,K]$

(12) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt[n]{x^2}$ a) $[0,K]$, $K>0$
b) $[0,\infty)$

1, Nutná podmínka: Bodově: $\sqrt[n]{x^2} \to 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \Rightarrow f_n \to 0$ bodově

Stejnoměrně: $f_n(0)=0$.

$\lim_{x\to\infty} |f_n(x)| = \infty \Rightarrow \sigma_n = \infty$ na intervalu $[0,\infty) \to$ není splněna nutná podmínka na $[0,\infty)$. Dále jen $[0,K]$.

$|f_n(x)| = \frac{\sqrt[n]{x^2}}{\sqrt{n}}$ Derivace: $(|f_n|)' = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot x^{\frac{2}{n}-1}$. Pro velká n je $\frac{2}{n}-1<0$

$\Rightarrow$ nejsou stac. body.

$\Rightarrow \sup_{[0,K]} |f_n(x)| = |f_n(x=K)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt[n]{K} \to 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,K]$.

2) Stejnoměrná konvergence řady: Tentokrát se Weierstrass nehodí, $\sqrt[n]{K} \to 1$ a $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ nekonverguje.

Co Leibniz? Potřebujeme monotonii, tj. $|f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)|$ na $[0,K]$

$? \ \sqrt[n+1]{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt[n]{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \ ?$

Problém!! $\frac{1}{\sqrt{n}}$ je sice klesající, ale $x^{\frac{2}{n}}$ je rostoucí pro $x<1$!! Monotonii na $[0,K]$ neukážeme.

Zbývá Abel-Dirichlet: $\underbrace{a_n(x) = x^{2/n}}_{\text{Je stejně stejnoměrně omezená posloupnost.}}$ $\underbrace{b_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{Číselná řada, konverguje} \Rightarrow \text{konverguje stejnoměrně na } [0,K]}$.

$$\left.\begin{array}{lll} x^{\frac{2}{n}} \leq K^{\frac{2}{n}} & \text{pro } K>1 \\ x^{2/n} \leq 1 & \text{pro } K\leq 1 \\ K^{2/n} \leq K^2 & \text{pro každé } n\in\mathbb{N} \end{array}\right\} \ a_n(x) \leq \max\{K^2, 1\}$$

Je $a_n(x)$ monotónní? Pro $x\in[0,1]$ je $a_n(x)$ rostoucí a dle Abela $\sum f_n(x) \rightrightarrows$ na $[0,1]$
Pro $x\in[1,K]$ je $a_n(x)$ klesající a dle Abela $\sum f_n(x) \rightrightarrows$ na $[1,K]$

$\Rightarrow$ Řada konverguje stejnoměrně na $[0,K]$!

Pozn: Na $[1,K]$ jsme mohli použít Leibnize přímo, na $[0,1]$ musíme Abelem.

Pozn. č. 2: Abel funguje i pro rostoucí $\{a_n(x)\}$, i když je formulovaná pro klesající.

---

(13) $\sum_{1}^{\infty} x^\alpha e^{nx}$, $\alpha\in\mathbb{N}_0$ a) $(-\infty,-1]$ b) $[-1,0]$ c) $[0,1]$

Nejdříve $\alpha=0$: $\sum e^{nx} = \sum (e^x)^n$ geometrická řada. Potřebujeme $q=e^x<1$, tedy $x<0$.

Proto na b) a c) konvergovat nemůže a na a) naopak konverguje stejnoměrně.

Například Weierstrassem s řadou $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$, protože $e^x \leq e^{-1}$ pro $x\leq -1$.

Nechť nyní $\alpha = 1$: $\sum x e^{nx}$

Bodově: $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = 0$, $f_n(-1) = -e^{-n}$, $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = e^{n}$

$f_n'(x) = e^{nx} + nxe^{nx} = 0 \Rightarrow nx = -1$, $x = -\frac{1}{n}$ ... tyto body jsou mezi -1 a 0.

$\Rightarrow$ Bodově konverguje k 0 na $[-\infty, -1]$ a $[-1, 0]$, ne na $[0, 1]$. Dále jen a), b)

$\sigma_n = \sup_{[-\infty,-1]} |xe^{nx}| = e^{-n} \to 0$, $f_n \rightrightarrows 0$ na $(-\infty, -1]$ a navíc Weierstrassem

$\sum |f_n| \leq \sum (e^{-1})^n$ konv. $\Rightarrow$ $\sum f_n \rightrightarrows$ na $(-\infty, -1]$

$\sigma_n = \sup_{[-1,0]} |xe^{nx}| = |f_n(x = -\frac{1}{n})| = \frac{1}{n \cdot e} = \frac{1}{en} \to 0 \Rightarrow$ nutná podmínka OK,

ale Weierstrass nefunguje, protože $\sum \frac{1}{en}$ nekonverguje. Nic lepšího ale nemáme, takže musíme postupovat trikem. Buď ukážeme negaci B.-C. podmínky, nebo takto:

$\sum_1^\infty x e^{nx} = x \sum (e^x)^n = \frac{x \cdot e^x}{1 - e^x}$ pro $x < 0$. Pro $x = 0$: $\sum xe^{nx}$ je $\sum 0 = 0$.

ale $\lim_{x \to 0_-} \frac{\overbrace{x e^{x}}^{\to 1}}{\underbrace{1 - e^x}_{\to -1}} = -1$. $-1 \neq 0$, proto

$\sum xe^{nx} \not\rightrightarrows$ na $[-1, 0]$

$\alpha = 2, 3, \ldots$ DÚ

---

14 Pozor, v zadání je zásadní překlep! Původně: $\sum \underbrace{\sin(\pi \sqrt{x^2 + k^2})}_{\substack{\text{není konst. } 0 \\ \text{nezávisí na } n}} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}}}_{\to 1}$ $f_n \not\to 0$, nekonv.

Správně: $\sum_1^\infty \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}) \cdot \sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}}$, $k \in \mathbb{R}$, $x \in (-\infty, \infty)$

Pro sin klasický trik z minulého semestru: $\sin(\pi \sqrt{n^2+k^2}) = \sin(\pi \sqrt{n^2+k^2} - \pi n + \pi n)$

$$= \sin\left(\pi \cdot \frac{k^2}{\sqrt{n^2+k^2} + n} + \pi n\right)$$

$$= (-1)^n \cdot \sin\left(\pi \frac{k^2}{\sqrt{n^2+k^2} + n}\right)$$

Tedy $\sum \overbrace{(-1)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi k^2}{n + \sqrt{n^2+k^2}}\right) \cdot \sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}}}^{f_n}$

Ozn. $g_n(x) = \sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}}$ Víme $\frac{x^2}{1+x^2} \in (0, 1)$, $\sup_{(-\infty,\infty)} g_n(x) = 1$. $\sin\left(\frac{\pi k^2}{n + \sqrt{n^2+k^2}}\right) \to 0$

$\Rightarrow \sigma_n \to 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$. Weierstrass se nehodí, ale nabízí se Abel.

$b_n(x) = (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi k^2}{n + \sqrt{n^2+k^2}}\right)$, $\sum b_n \rightrightarrows$ protože b_n nezávisí na x.

$g_n(x)$ je stejně stejnoměrně omezená ($|g_n| \leq 1$). Monotonie zřejmá, ~~gn jsou rostoucí~~ $g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$.

$\Rightarrow \sum f_n \rightrightarrows$ na $(-\infty, \infty)$

15 $\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$ a) $[-K,K]$, $K>0$ b) $(-\infty,\infty)$

Nutná podmínka: $|f_n(x)| = \frac{1}{n+\sin x} \le \frac{1}{n-1} \to 0$ bodově OK

stejnoměrně: stejně $\sigma_n = \sup |f_n(x)| \le \frac{1}{n-1}$ $\left(= \frac{1}{n-1} \text{ pro } K \ge \frac{\pi}{2} \right)$

$\sigma_n \to 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$

Nabízí se Leibniz: Máme. $g_n = \frac{1}{n+\sin x} \rightrightarrows 0$. Ještě monotonie, ale pro pevné x je očividně $\frac{1}{n+1+\sin x} \le \frac{1}{n+\sin x}$. Dle Leibnize tak $\sum f_n \rightrightarrows$ na a) i b)

16 $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x \cdot \ln\left(\frac{x}{n}\right)$ a) na $(0,K]$ b) na $(0,\infty)$

Nutná podmínka: Bodově: pevné x, $n \to \infty$: $|f_n(x)| = \frac{x}{n} \left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right| \to 0$

škálovací limita, $\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n}}$ poraží $\underset{\downarrow -\infty}{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}$

Stejnoměrně: n pevné. $\lim_{x\to 0} |f_n(x)| = 0$ opět škálovací limita

$\lim_{x\to +\infty} |f_n(x)| = +\infty$!! $\sigma_n = \infty$ na $(0,\infty) \Rightarrow$ nemůže konv. stejnoměrně.

Dále jen a), $x \in (0,K]$: $|f_n|' = \frac{1}{n}\cdot \ln\frac{x}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\cdot\left(\ln\frac{x}{n} + 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{n} = \frac{1}{e}$, $\underline{x = \frac{n}{e}}$

roste do nekonečna, časem vyběhne z intervalu $(0,K]$

$\Rightarrow \sigma_n = |f_n(K)| \to 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$

Konvergence řady: Nabízí se Leibniz. Už máme $g_n = \frac{x}{n}\cdot\ln\left(\frac{x}{n}\right) \rightrightarrows 0$.

Potřebujeme monotonii, tedy $\frac{x}{n+1}\cdot\left|\ln\frac{x}{n+1}\right| \le \frac{x}{n}\cdot\left|\ln\frac{x}{n}\right|$ $\left(\frac{x}{n} < 1 \Rightarrow \ln \text{ je záporný}\right)$

tj. $\frac{\cancel{x}}{n+1}\cdot\ln\frac{x}{n+1} \ge \frac{\cancel{x}}{n}\cdot\ln\frac{x}{n}$

$$\frac{1}{n+1}\cdot\left(\ln x - \ln(n+1)\right) \ge \frac{1}{n}\cdot\left(\ln x - \ln n\right)$$

$$n\cdot\ln x - n\cdot\ln(n+1) \ge (n+1)\ln x - (n+1)\ln n$$

$$(n+1)\ln n - n\cdot\ln(n+1) \ge \underbrace{\ln x} \text{ ... pevné číslo.}$$

$$= \ln\left(\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\right) = \ln\left(n\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \underbrace{\ln n}_{\to +\infty} + \underbrace{\ln\Big(\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n}_{\to e^{-1}}\Big)}_{\to -1}$$

Tedy pro lib. pevné x je od nějakého n_0 posloupnost $g_n(x)$ monotónní a $\sum f_n(x)$ dle Leibnize $\rightrightarrows$ na $(0,K]$

(17) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{100\sqrt{n}}\cdot e^{-nx}$ na a) $[0,K]$, $K>0$ (5)

b) $[0,\infty)$

Pozorování: $x=0$: $e^{-nx}=1$. Máme jen číselnou řadu $\sum(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{100\sqrt{n}}$.

Ta konverguje dle Abela a Leibnize ($\frac{n-1}{n+1}$ je monot., omez., $\sum(-1)^n\cdot\frac{1}{100\sqrt{n}}$ konv.)

Pro $x>0$ je člen $e^{-nx}=(e^{-x})^n$. Vidíme geometrickou posloupnost s kvocientem

$q=e^{-x}<1$. To bude konvergenci jen pomáhat, můžeme tak argumentovat Abelem takto.

$a_n(x)=a_n=\frac{n-1}{n+1}$ je stejně stejnoměrně omez. ($a_n\leq 1$) a monotónní.

Stačí ukázat, že $\sum b_n(x)=\sum(-1)^n\cdot\frac{1}{100\sqrt{n}}\cdot e^{-nx}$ konverguje stejnoměrně.

Lehce Leibnizem: $\sup_{[0,\infty)} e^{-nx}=1$, tj. pro $f_n(x)=\frac{1}{100\sqrt{n}}\cdot e^{-nx}$ je $f_n\to 0$ bodově

a protože $\sigma_n=\sup_{[0,\infty)} f_n(x)=\frac{1}{100\sqrt{n}}\to 0$, je $f_n\rightrightarrows 0$

Monotonie zřejmá, $\frac{1}{100\sqrt{n}}$ je klesající a e^{-nx} také klesající, obě kladné $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ součin klesající $\Rightarrow$ $\sum b_n\rightrightarrows$ dle Leibnize a $\sum a_n b_n\rightrightarrows$ dle Abela.