Sada příkladů 4/9

Henri Lebesgue a jeho integrál

Fubiniho věta, věta o substituci

1. Převeďte $\int_\Omega f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a $\Omega = \{(x,y); |x| + |y| \le 1\}$.

2. Převeďte $\int_\Omega f(x \cdot y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a Ω je ohraničeno křivkami $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ a x, $y > 0$.

3. Přepište $\int_0^1 (\int_y^1 f(x)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$ pomocí jednoho integrálu.

4. Určete plošný obsah části roviny omezené následujícími křivkami:
   a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
   b) $(x^3 + y^3)^2 = xy$
   c) $x + y = a$, $x + y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$

5. Určete objem tělesa omezeného následujícími plochami:
   a) $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a \ge R\sqrt{2} > 0$
   b) $z = xy$, $z = 0$, $x + y + z = 1$
   c) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$
   d) $z = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$
   e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, a, b, $c > 0$
   f) $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, a, b, $c > 0$
   g) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$

6. Spočtěte následující integrály:
   a) $\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
   b) $\int_\Omega x^{-p} y^{-q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\Omega = \{(x,y); xy \ge 1, x \ge 1\}$
   c) $\int_\Omega (x+y)^{-p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\Omega = \{(x,y); x + y \ge 1, 0 \le x \le 1\}$

7. Najděte souřadnice hmotného středu homogenní desky ohraničené $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, x, y, $a > 0$.

8. Najděte momenty setrvačnosti I_x a I_y homogenní desky s hustotou $\varrho = 1$ ohraničené $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $0 \le x \le a$.

9. Najděte souřadnice hmotného středu homogenního tělesa ohraničeného $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$, a, b, $c > 0$.

10. Kruhový válec s osou ve směru osy z kartézských souřadnic je naplněn plynem, jehož hustota se řídí barometrickou formulí

$$\varrho = \varrho_0 \exp(-\frac{\varrho_0}{p_0} gz)\,,$$

kde p_0 je tlak na spodní základně $z = 0$, g je tíhové zrychlení. Výška válce je h, poloměr R. Určete hmotnost vzduchu ve válci.

LEBESGUEŮV INTEGRÁL

Teorie je dlouhá a nebudeme ji zde celou opakovat. Jen nejdůležitější věty pro počítání.

Věta: Má-li fce Riemannův integrál, má také Lebesgueův a jsou si rovny.

Věta: Má-li nezáporná fce Newtonův integrál, má také Lebesgueův a jsou si rovny.

Fubiniho věta (Přesněji její důsledek)

~~Věta~~ Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{q+s}$ je měřitelná a f je integrovatelná na Ω.

Označme $P_1 = \{ x \in \mathbb{R}^q : \exists y \in \mathbb{R}^s \text{ t.ž. } (x,y) \in \Omega \}$ ... průmět Ω do $\mathbb{R}^q$

$P_2 = \{ y \in \mathbb{R}^s : \exists x \in \mathbb{R}^q \text{ t.ž. } (x,y) \in \Omega \}$ ... průmět Ω do $\mathbb{R}^s$

Dále nechť pro $x \in P_1$: $M^x := \{ y \in \mathbb{R}^s : (x,y) \in \Omega \}$

pro $y \in P_2$: $M^y := \{ x \in \mathbb{R}^q : (x,y) \in \Omega \}$.

Jsou-li P_1 a P_2 měřitelné, pak

1) pro s.v. $x \in P_1$ ex. $F(x) = \int_{M^x} f(x,\cdot)\, dy$

pro s.v. $y \in P_2$ ex. $G(y) = \int_{M^y} f(\cdot,y)\, dx$

2) Existují $\int_{P_1} F(x)\, dx$ a $\int_{P_2} G(y)\, dy$.

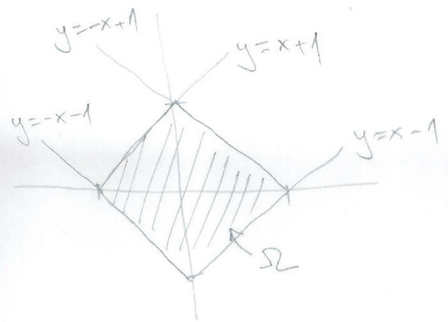
3) Platí
$$\int_\Omega f = \int_{P_1} F(x)\, dx = \int_{P_1} \left(\int_{M^x} f(x,\cdot)\, dy \right) dx = \int_{P_2} \left(\int_{M^y} f(\cdot,y)\, dx \right) dy = \int_{P_2} G(y)\, dy.$$

Věta o substituci: Nechť $G \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}^N$ je prosté zobrazení třídy C^1. Pak pro lib. měřitelnou fci $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definovanou na $\varphi(G)$ platí

$$\int_{\varphi(G)} f(y)\, dy = \int_G f(\varphi(x))\, |J_\varphi(x)|\, dx \, ,$$ kde

$$J_\varphi = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$ je jakobián zobrazení φ.

1) $\int_\Omega f(x+y)\,dx\,dy$



Vidíme, že Ω lze popsat jako $x+y \in [-1,1]$ a $y-x \in [-1,1]$

Nabízí se tak změna souřadnic

$$\underbrace{\begin{aligned} u &= x+y \\ v &= y-x \end{aligned}}$$

Pak příslušná oblast $\tilde{\Omega}$ bude prostě $u \in [-1,1]$, $v \in [-1,1]$

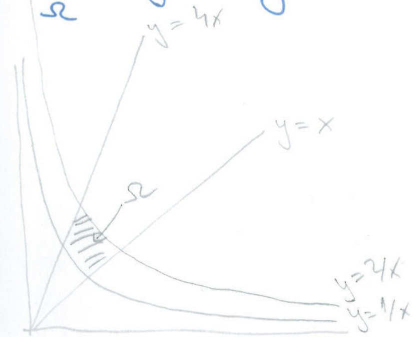
$$\varphi: (u,v) \longmapsto (x,y) \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{u-v}{2}, \quad y = \frac{u+v}{2}$$

$$\varphi([-1,1]\times[-1,1]) = \Omega \qquad J_\varphi = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\int_\Omega f(x+y)\,dx\,dy = \int_{[-1,1]\times[-1,1]} f(u)\,|J_\varphi|\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_{[-1,1]\times[-1,1]} f(u)\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(u)\,du\right)dv$$

$$= \underline{\int_{-1}^{1} f(u)\,du}$$

2) $\int_\Omega f(x\cdot y)\,dx\,dy$



Podobně: $x\cdot y \in [1,2]$, $\frac{y}{x} \in [1,4]$

$$\begin{aligned} u &= x\cdot y \\ v &= \frac{y}{x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Omega} = \{(u,v) : u \in [1,2],\ v \in [1,4]\}$$

$$\varphi: (u,v) \longmapsto (x,y) \ : \quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{u\cdot v}$$

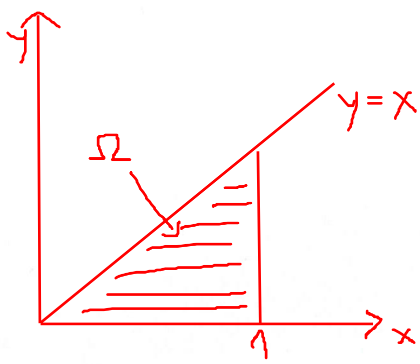
$$J_\varphi = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2} & -\frac{1}{2}u^{1/2}v^{-3/2} \\ \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2} \end{vmatrix} = \underline{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{v}}$$

$$\int_\Omega f(xy)\,dx\,dy = \int_{[1,2]\times[1,4]} f(u)\cdot\frac{1}{2v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^2 f(u)\cdot\left(\int_1^4 \frac{1}{v}\,dv\right)du$$

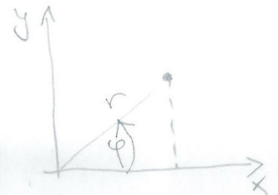
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 f(u)\cdot \ln 4\,du = \underline{\ln 2\int_1^2 f(u)\,du}$$

3) $$\int_0^1\left(\int_y^1 f(x)\,dx\right)dy = \int_\Omega f(x)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^x f(x)\,dy\right)dx = \int_0^1 f(x)\left(\int_0^x 1\,dy\right)dx$$

$$= \underline{\int_0^1 x f(x)\,dx}$$



4) a) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$



Polární souřadnice: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$J_\varphi = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$\varphi : (r,\varphi) \mapsto (x,y)$

Funguje dobře na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y);\ x \geq 0, y = 0\}$

Vyňatá množina je ale míry nula, takže OK.

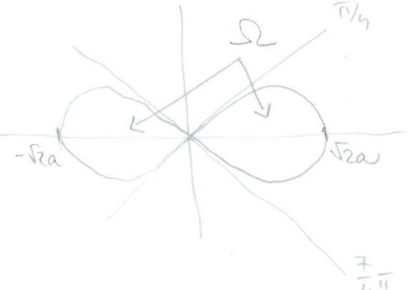
$(r > 0,\ \varphi \in (0, 2\pi))$

$r^4 = 2a^2 r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$

$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ .... to dá výsledek jen pokud $\cos 2\varphi \geq 0$, tj.

$2\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ $(+2k\pi)$

$\varphi \in (0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi) \cup (\frac{7}{4}\pi, 2\pi)$



Obrazec je očividně symetrický.

Stačí spočítat čtvrtinu odpovídající úhlům $\varphi \in (0, \frac{\pi}{4})$

$$S = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr\,d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} 2a^2\cos 2\varphi\,d\varphi = 4a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi = 4a^2\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \underline{\underline{2a^2}}$$

b) $(x^3+y^3)^2 = xy$ Polární souřadnice se nehodí! Musíme vymyslet jiné.

LS... kladná ⇒ PS musí být kladná ⇒ množina je jen v 1. a 3. kvadrantu

$(x,y) \in \Omega \Leftrightarrow (-x,-y) \in \Omega$ ⇒ symetrie ⇒ Stačí se věnovat 1. kvadrantu, tj. $x, y > 0$.

Chceme aby x^3+y^3 vyrušilo úhly ⇒ $x = r\cdot\cos^{2/3}\varphi$, $y = r\cdot\sin^{2/3}\varphi$ Pak $x^3+y^3 = r^3$

a dostaneme $r^6 = r^2\cos^{2/3}\varphi\sin^{2/3}\varphi$

$r^4 = \cos^{2/3}\varphi\sin^{2/3}\varphi$

$r = \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{1/6}$

$$J_\varphi = \begin{vmatrix} \cos^{2/3}\varphi & -\frac{2}{3}r\cos^{-1/3}\varphi\sin\varphi \\ \sin^{2/3}\varphi & \frac{2}{3}r\sin^{-1/3}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}r\cdot\left(\cos^{5/3}\varphi\sin^{-1/3}\varphi + \sin^{5/3}\varphi\cos^{-1/3}\varphi\right)$$

$$= \frac{2}{3}r\cos^{-1/3}\varphi\sin^{-1/3}\varphi\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{2}{3}r\cos^{-1/3}\varphi\sin^{-1/3}\varphi$$

φ je regulární na $r > 0$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, to je OK, na osách naše množina mimo počátek není.

$$S = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{1/6}} \frac{2}{3}r\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{-1/3} dr\,d\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{-1/3}\cdot\left[r^2\right]_0^{\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{1/6}} d\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} 1\,d\varphi = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$$

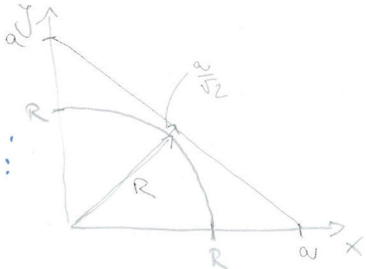
c) DÚ

5) a) $x+y+z=a$ .... rovina

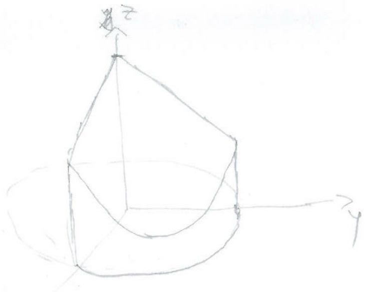
$x^2+y^2=R^2$ .... válec

$x=0,\ y=0,\ z=0$, $a \geq \sqrt{2}R > 0$

Co znamená podmínka $a \geq \sqrt{2}R$? Průmět do roviny $z=0$:



Rovina je dále než válec!



Máme válec, nabízí se použít válcové souřadnice.

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

$$J_\varphi = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$V = \int_\Omega 1\, dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2}\int_0^R\int_0^{a-r\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)} r\, dz\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^R ra - r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{aR^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{R^3}{3}\cdot(1+1) = \underline{\underline{R^2\cdot\left(\frac{\pi a}{4} - \frac{2}{3}R\right)}}$$

b) $z = xy$ .... hyperbolický paraboloid

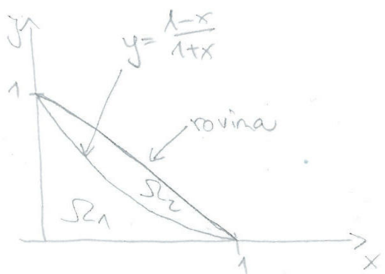
$z=0$ ... rovina

$x+y+z=1$ .... rovina

Najdeme průnik $z=xy$ a $x+y+z=1$: $x+y+xy=1$: $y(1+x)=1-x$

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

Průmět do $z=0$:



Na části Ω_1 je více omezující paraboloid, který leží pod rovinou $x+y+z=1$.

Na části Ω_2 je více omezující rovina $x+y+z=1$, která leží pod paraboloidem

$$V = \underbrace{\int_0^{xy}\left\{\iint_{\Omega_1} 1\,dx\,dy\right\}dz}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{1-x-y}\left\{\iint_{\Omega_2} 1\,dx\,dy\right\}dz}_{I_2}.$$

Musíme seřadit pořadí integrálů správně!!

$$I_1 = \int_0^1\int_0^{\frac{1-x}{1+x}}\int_0^{xy} 1\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{\frac{1-x}{1+x}} xy\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^3-2x^2+x}{x^2+2x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x - 4 + 4\frac{2x+2}{x^2+2x+1} - 4\cdot\frac{1}{x^2+2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2} - 4 + 4\cdot\ln 4 + \frac{4}{2} - 4\right] = 4\ln 2 - \frac{11}{4}$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} 1-x-y \; dy \, dx = \int_0^1 (1-x)\cdot\left[(1-x)-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right] - \frac{1}{2}\cdot\left[(1-x)^2-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right] dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^2\cdot\left[\left(1-\frac{1}{1+x}\right) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(1+x)^2}\right)\right] dx = \int_0^1 (1-x)^2\cdot\left[\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+2x}{(1+x)^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x(1+x)(1-x)^2 - (x^2+2x)(1-x)^2}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 - 4x + 8 - 6\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+1} + \frac{4}{x^2+2x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3} - 2 + 8 - 6\ln 4 - \frac{4}{2} + 4\right] = -6\ln 2 + \frac{25}{6}$$

$$\underline{\underline{I_1 + I_2 = -2\ln 2 + \frac{17}{12}}}$$