

Henri Lebesgue a jeho integrál

Fubiniho věta, věta o substituci

1. Převedte $\int_{\Omega} f(x+y) dx dy$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a $\Omega = \{(x, y); |x| + |y| \leq 1\}$.
2. Převedte $\int_{\Omega} f(x \cdot y) dx dy$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a Ω je ohraničeno křivkami $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ a $x, y > 0$.
3. Přepište $\int_0^1 (\int_y^1 f(x) dx) dy$ pomocí jednoho integrálu.
4. Určete plošný obsah části roviny omezené následujícími křivkami:
 - a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
 - b) $(x^3 + y^3)^2 = xy$
 - c) $x + y = a$, $x + y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$
5. Určete objem tělesa omezeného následujícími plochami:
 - a) $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a \geq R\sqrt{2} > 0$
 - b) $z = xy$, $z = 0$, $x + y + z = 1$
 - c) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$
 - d) $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$
 - e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $a, b, c > 0$
 - f) $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a, b, c > 0$
 - g) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$
6. Spočtěte následující integrály:
 - a) $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$
 - b) $\int_{\Omega} x^{-p} y^{-q} dx dy$, $\Omega = \{(x, y); xy \geq 1, x \geq 1\}$
 - c) $\int_{\Omega} (x+y)^{-p} dx dy$, $\Omega = \{(x, y); x+y \geq 1, 0 \leq x \leq 1\}$
7. Najděte souřadnice hmotného středu homogenní desky ohraničené $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x, y, a > 0$.
8. Najděte momenty setrvačnosti I_x a I_y homogenní desky s hustotou $\rho = 1$ ohraničené $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $0 \leq x \leq a$.

9. Najděte souřadnice hmotného středu homogenního tělesa ohraničeného $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$, $a, b, c > 0$.
10. Kruhový válec s osou ve směru osy z kartézských souřadnic je naplněn plynem, jehož hustota se řídí barometrickou formulí

$$\varrho = \varrho_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0}{p_0}gz\right),$$

kde p_0 je tlak na spodní základně $z = 0$, g je tíhové zrychlení. Výška válce je h , poloměr R . Určete hmotnost vzduchu ve válci.

Henri Lebesgue a jeho integrál

Lebesgueova a Léviho věta

Spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-nx} x^2 dx$

Rozvinutím vhodné funkce do řady spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

5. $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx \quad \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$
6. $\int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1-x^2} dx \quad \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$
7. $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90} \right)$

Integrály závislé na parametru

8. Ukažte, že následující integrály jsou spojitými funkcemi proměnné na dané množině:

a) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a (\pi - x)^a} dx, a < 2$

$$\text{b) } \int_0^2 x^2 \cos ax \, dx, \quad -\infty < a < \infty$$

$$\text{c) } \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a} \, dx, \quad 1 < a < \infty$$

Zjistěte, pro které hodnoty parametru integrál konverguje, a spočtěte jej:

$$9. \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)} \, dx$$

$$10. \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} \, dx$$

$$11. \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$$

$$12. \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx$$

$$13. \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} \, dx$$

$$14. \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx$$

$$15. \int_0^\infty e^{-ax^2} \cosh bx \, dx$$

$$16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a \sin^2 x)}{\sin^2 x} \, dx$$

$$17. \int_0^\pi \ln(a \pm b \cos x) \, dx$$

$$18. \int_0^\infty x e^{-ax} \cos bx \, dx$$

$$19. \int_0^\infty e^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} \, dx$$

$$20. \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sinh x}{x} dx$$

$$21. \int_0^1 x^{-\alpha} \ln^n x dx, n \in \mathbb{N}_0$$

$$22. \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x) dx$$

$$23. \int_{x>0, y>0} e^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})} x^{-1/3} y^{-2/3} dx dy$$

Doplněním vhodného parametru spočtete:

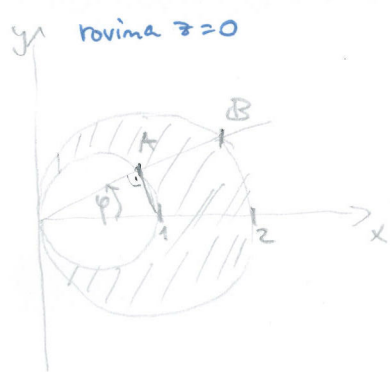
$$24. \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx$$

$$25. \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$$

26. Vyšetřete průběh funkce na jejím definičním oboru:

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$$

5c) $z = x^2 + y^2$... rotační paraboloid
 $x^2 + y^2 = x$... $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$... váleček
 $x^2 + y^2 = 2x$... $(x - 1)^2 + y^2 = 1$... váleček
 $z = 0$... rovina



Válcové souřadnice: $x = r \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi$
 $z = z$
 $J_\varphi = r$

z běhá očividně mezi 0 a $x^2 + y^2 = r^2$

kde běhá r ? Najdeme body na kružnici (A, B)

$\Delta: (0,0), (1,0), A$ je pravoúhlý ~~trojúhelník~~, přepona má délkou 1, $\Rightarrow$ délka odvěsny je $\cos \varphi$!

Podobně vzdálenost mezi počátkem a B je $2 \cos \varphi \Rightarrow r \in (\cos \varphi, 2 \cos \varphi)$,
 a na konci $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ [ze symetrie by stačilo $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ a vynásobit 2.

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \int_0^{r^2} r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} r \cdot r^2 \, dr \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 \cos \varphi)^4 - (\cos \varphi)^4 \, d\varphi$$

$$= \frac{15}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{15}{16} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi \, d\varphi = \frac{15}{16} \pi + \frac{15}{32} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt = \frac{45}{32} \pi$$

5d) $z = e^{-(x^2 + y^2)}$... horní plocha
 $z = 0$... rovina
 $x^2 + y^2 = R^2$... váleček

Jasně válcové souřadnice

$z \in (0, e^{-r^2})$
 $r \in (0, R)$
 $\varphi \in (0, 2\pi)$

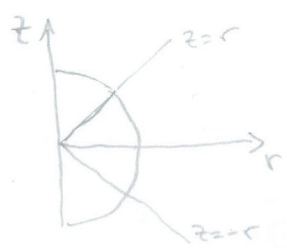
$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{e^{-r^2}} r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R r e^{-r^2} \, dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^R r e^{-r^2} \, dr = \pi \int_0^{R^2} e^{-t} \, dt$$

$$= -\pi [e^{-t}]_0^{R^2} = \pi(1 - e^{-R^2})$$

5e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

Pro představení $a, b, c = 1$: ... koule (sféra)

... $z^2 = r^2$, tj. $z = \pm r$... kuželová plocha

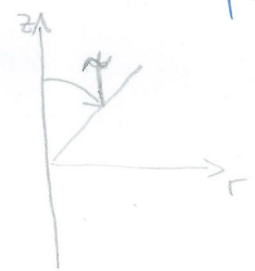


Střálování sférické souřadnice:

$$\begin{aligned}x &= ar \sin \varphi \cos \psi \\y &= br \sin \varphi \sin \psi \\z &= cr \cos \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r &\in (0, \infty) \\ \varphi &\in (0, 2\pi) \\ \psi &\in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Touto volbou je φ úhel měřený takto:



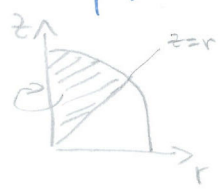
$\psi = 0 \Rightarrow z$ je maximální
 $\psi = \pi/2 \Rightarrow z = 0$
 $\psi = \pi \Rightarrow z$ je minimální

$$J_\varphi = \begin{vmatrix} a \sin \varphi \cos \psi & -a \sin \varphi \sin \psi & a \cos \varphi \cos \psi \\ b \sin \varphi \sin \psi & b \sin \varphi \cos \psi & b \cos \varphi \sin \psi \\ c \cos \varphi & 0 & -c \sin \varphi \end{vmatrix}$$

$$= abc \cdot r^2 \cdot [-\sin^3 \varphi \cos^2 \psi - \sin \varphi \cos^2 \psi \sin^2 \varphi - \sin \varphi \cos^2 \psi \cos^2 \varphi - \sin^3 \varphi \sin^2 \psi]$$

a $|J_\varphi| = abc r^2 \cdot \sin \varphi$. (Při nestřálování vyjde prostě $r^2 \sin \varphi$)

Zadání umožňuje různý výklad, my spočítáme objem tohoto



Tedy: $r \in (0, 1)$
 $\varphi \in (0, 2\pi)$

$\psi \in (0, \pi/4)$... $\pi/4$ odpovídá $z=r$!!

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/4} r^2 \sin \varphi \, d\varphi \, dr \, d\psi = 2\pi \left(\int_0^1 r^2 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{\pi/4} \sin \varphi \, d\varphi \right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot abc$$

5f) $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $x=0, y=0, z=0$... tedy 1. kvadrant

Lze spočítat bez převodu souřadnic, jen si zjednodušíme práci:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \frac{x}{a} & x &= a\tilde{x} \\ \tilde{y} &= \frac{y}{b} & y &= b\tilde{y} \\ \tilde{z} &= \frac{z}{c} & z &= c\tilde{z}\end{aligned}$$

$J_\varphi = abc$ triviálně a stačí nám vyřešit

úlohu $(\tilde{x} + \tilde{y})^2 + \tilde{z}^2 = 1$, $\tilde{x}=0, \tilde{y}=0, \tilde{z}=0$. Výsledek pak přenásobíme abc a je to.

Pro jednoduchost zápisu dále bez rhover.

Zvolíme x jako největší proměnnou, očividně největší možné x je $x=1$. Tj. $x \in (0, 1)$.

Pro pevné $x \in (0, 1)$ je maximální možné y $y=1-x$. Tedy $y \in (0, 1-x)$

Nakonec pro dané (x, y) je $z \in (0, \sqrt{1-(x+y)^2})$

$$\text{Tedy } V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\sqrt{1-(x+y)^2}} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{1-(x+y)^2} \, dy \, dx.$$

Vnitřní integrál: $\int_0^{1-x} \sqrt{1-(x+y)^2} \, dy = \int_x^1 \sqrt{1-t^2} \, dt = \int_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$

$\cos^2 \varphi$ pomocí $\cos 2\varphi$
 a $\sin(2\arcsin x)$ pomocí
 součtového vztahu

Zbývá $\int_0^1 \frac{\pi}{4} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{\arcsin x}{2} dx = \frac{\pi}{4} + \int_1^0 \frac{\sqrt{t} dt}{4} - \frac{1}{2} \left([x \arcsin x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)$ (3)

$\uparrow$
 $t = 1 - x^2$
 $dt = -2x dx$

$\uparrow$
 počítá se
 per partes

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \int_1^0 t^{1/2} dt$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$t = 1 - x^2$
 $dt = -2x dx$

Přivodní příklad tedy $V = \frac{abc}{3}$

5g) DÚ

$$6a) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\varphi = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = \pi \int_0^\infty e^{-t} dt = \pi$$

Důsledek: $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} dx = \sqrt{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right)} = \sqrt{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right)} = \sqrt{\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy} = \sqrt{\pi}$

Přitom $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ nemůžeme spočítat, nemá elementární primitivní funkci!!

6b) $\int_{\Omega} x^{-p} y^{-q} dx dy$ $\Omega = \{x \geq 1, y \geq \frac{1}{x}\}$

" $\int_1^{\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} x^{-p} y^{-q} dy dx = \int_1^{\infty} x^{-p} \cdot \left[\frac{y^{1-q}}{1-q} \right]_{\frac{1}{x}}^{\infty} dx$ (pro $q=1$ vyjde lny a stejný problém)

$\rightarrow$ potřebuji $q > 1$, aby $1-q < 0$, jinak je integrál nekonečný!!

Pro $q > 1$: $\int_1^{\infty} x^{-p} \cdot x^{q-1} \cdot \frac{1}{q-1} dx$

$= \frac{1}{q-1} \int_1^{\infty} x^{q-p-1} dx = \frac{1}{q-1} \cdot \left[\frac{x^{q-p}}{q-p} \right]_1^{\infty}$... potřebuji $p > q$!

Pro $q > 1, p > q$: $= \frac{1}{q-1} \cdot \frac{1}{p-q}$

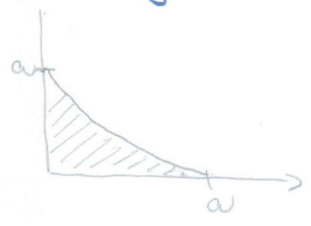
6c) $\int_{\Omega} (x+y)^{-p} dx dy$ $\Omega = \{x+y \geq 1, x \in [0,1]\}$

" $\int_0^1 \int_{1-x}^{\infty} (x+y)^{-p} dy dx = \int_0^1 \int_1^{\infty} t^{-p} dt dx = \int_1^{\infty} t^{-p} dt = \frac{1}{p-1}$ pro $p > 1$

$t = x+y$
 $dt = dy$

Pro $p \leq 1$ nemá konečný integrál.

7) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $x, y, a > 0$



Víme: $[T_x, T_y] = \left[\frac{\int x dx dy}{\int 1 dx dy}, \frac{\int y dx dy}{\int 1 dx dy} \right]$

Deska je symetrická $\Rightarrow T_x = T_y$.

Nalíží se $x = r \cos^3 \varphi$ $y = r \sin^3 \varphi$ pro $r \in (0, a), \varphi \in (0, \pi/2)$

$\int 1 dx dy = \int_0^a \int_0^{\pi/2} 3r \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi dr = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi$

$= \frac{3}{16} a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{3\pi a^2}{32}$

$2\varphi = t$
 $2d\varphi = dt$

$J_{\varphi} = \begin{vmatrix} \cos^3 \varphi & -3r \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ \sin^3 \varphi & 3r \sin^2 \varphi \cos \varphi \end{vmatrix}$

$= 3r \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi + 3r \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi$

$= 3r \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$

$\int x dx dy = \int_0^a \int_0^{\pi/2} 3r^2 \cos^5 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi dr = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^5 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \cdot (1 - \sin^2 \varphi)^2 \cdot \sin^2 \varphi d\varphi$

$= \frac{3}{2} a^2 \cdot \int_0^1 (1-t^2)^2 \cdot t^2 dt = \frac{3}{2} a^2 \int_0^1 t^2 - 2t^4 + t^6 dt = \frac{3}{2} a^2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) = \frac{3}{2} a^2 \cdot \frac{35-42+15}{105} = \frac{3}{2} a^2 \cdot \frac{8}{105} = \frac{12 a^2}{70} = \frac{6 a^2}{35}$

Průto $T_x = T_y = \frac{\frac{8}{105}a^3}{\frac{3\pi a^2}{32}} = a \cdot \frac{256}{315\pi}$

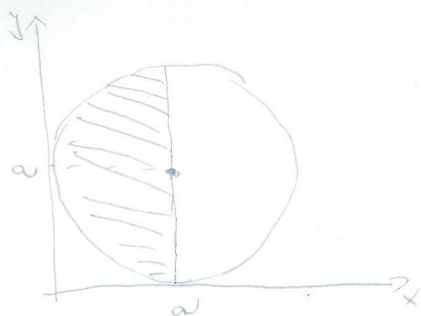
5

8) $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$

$x=0$
 $y=0$
 $x \in (0, a)$

$I_x = \int x^2 dx dy$

$I_y = \int y^2 dx dy$



Pomůcké polární souřadnice: $x = a + r \cos \varphi$
 $y = a + r \sin \varphi$

$\Rightarrow r \in (0, a), \varphi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), J_\varphi = r$ platí stále

$$I_x = \int_0^{a\frac{3\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (a + r \cos \varphi)^2 r d\varphi dr = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^a (a^2 r + 2a r^2 \cos \varphi + r^3 \cos^2 \varphi) dr d\varphi$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{a^3}{2} + \frac{2}{3} a^3 \cos \varphi + \frac{a^4}{4} \cos^2 \varphi \right) d\varphi = \frac{\pi a^3}{2} - \frac{4}{3} a^3 + \frac{\pi a^4}{8} = \underline{\underline{a^4 \left(\frac{5}{8} \pi - \frac{4}{3} \right)}}$$

$$I_y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^a (a + r \sin \varphi)^2 r d\varphi dr = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^a (a^2 r + 2a r^2 \sin \varphi + r^3 \sin^2 \varphi) dr d\varphi$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{a^3}{2} + \frac{2}{3} a^3 \sin \varphi + \frac{a^4}{4} \sin^2 \varphi \right) d\varphi = \frac{\pi a^3}{2} + 0 + \frac{\pi a^4}{8} = \underline{\underline{\frac{5}{8} \pi a^4}}$$

9) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z=c$ kužel postavený na špičce.

Ze symetrie $T_x = T_y = 0$!! $T_z = \frac{\int z dx dy dz}{\int 1 dx dy dz}$

Úvaha: Převodem do $\tilde{x} = \frac{x}{a}, \tilde{y} = \frac{y}{b}, \tilde{z} = \frac{z}{c}$ bude $\int 1 dx dy dz = abc \int 1 d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}$

$a \int z dx dy dz = abc^2 \int \tilde{z} d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}$

Výsledek pak bude $T_z = c \cdot T_{\tilde{z}}$, kde $T_{\tilde{z}}$ jsou souřadnice středu tělesa $x^2 + y^2 = z^2, z \leq 1$.

$$\int 1 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z r dr dz d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{z^2}{2} dz d\varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$\int z dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z z r dr dz d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{z^3}{2} dz d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$T_z = \frac{3}{4},$ tj. původní úloha
 $T_z = \frac{3}{4}c$
 $T = [0, 0, \frac{3}{4}c]$

10

$$m = \int_{\Omega} \rho \, dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{P_0} g z} r \, dz dr d\varphi$$

$$= \frac{2\pi R^2}{2} \cdot \int_0^h \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{P_0} g z} dz = \rho_0 \pi R^2 \int_0^h \exp\left(-\frac{\rho_0}{P_0} g z\right) dz = \underline{\underline{\frac{\rho_0 \pi R^2}{g} \left(1 - e^{-\frac{\rho_0}{P_0} g h}\right)}}$$

6

Leviho věta : $\{f_n\}_n^{\infty} \subset L$, $f_n \nearrow f$
 Potom $\int \lim f_n = \lim \int f_n$ (může být nekonečný)

Variananta pro řady : $\{f_n\}_n^{\infty} \subset L$, $f_n \geq 0$
 Potom $\int \sum_1^{\infty} f_n = \sum_1^{\infty} \int f_n$

Lebesgueova věta : $\{f_n\}_n^{\infty} \subset L$, $f_n \rightarrow f$ s.v. a $\exists g \in L \, \forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq g$
 Potom $f \in L$ a $\int \lim f_n = \lim \int f_n$

Tedy : Levi : monotonie + odhad
 Lebesgue : bez monotonie, ale s majorantou

① $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx$ $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ na $x \in (0,1)$ je $\left. \begin{matrix} x^n < 1 \\ \frac{1}{n} < 1 \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n} < 1$
 $|f_n(x)| \leq 1$, $\int_0^1 1 dx = 1 \dots 1$ je majoranta, použijme Lebesgue
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} dx = \int_0^1 0 dx = \underline{\underline{0}}$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x \, dx$ e^{-x} vše převálcuje $\Rightarrow$ hledám majorantu

Velmi hrubě : $\frac{\ln(x+n)}{n} \leq \frac{x+n}{n} \leq x+1$ pro velká n

$|f_n(x)| \leq e^{-x} \cdot (x+1) \dots$ to je očividně integrovatelná majoranta

$\Rightarrow \lim \int = \int \lim = \int 0 dx = 0$ protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+n)}{n} = 0$ ze stáloucí limity

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$

⑦

$x \in (0,1)$: $x^n \rightarrow 0$, takže $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n \leq 1$, 1 je integrovatelná majoranta

$x \in (1,\infty)$: $x^n \rightarrow \infty$: $\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{x^{-n}+x^n} \leq \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{x^2}$ pro $n \geq 2$, $\frac{1}{x^2}$ je int. majorant

$\Rightarrow$ Lebesgue: $\lim \int = \int \lim = \int f(x) dx$ kde $f(x) = 0$ na $(0,1)$
 $= \frac{1}{2}$ v $x=1$
 $= 0$ na $(1,\infty)$

Tedy $f(x)=0$ s.v. a $\int f(x) dx = \underline{\underline{0}}$.

④ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^2 dx$

e^{-nx} je klesající v $n \Rightarrow e^{-nx} \leq e^{-x}$ pro $x > 0$

$e^{-x} \cdot x^2$ je integrovatelná (kdo nevěří, udělá per partes)

$\Rightarrow$ Lebesgue: $\lim \int = \int \lim = \int 0 dx = \underline{\underline{0}}$.

⑤ $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x} \cdot \frac{1}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{x e^{-nx}}_{f_n \geq 0} dx$

[Vim, že původní integrál je konečný, protože u $x=0$ má $\frac{x}{e^x-1}$ konečnou limitu
a u ∞ klesá exponenciálně $\Rightarrow$ jako (n) konverguje.]

$\Rightarrow$ Levi pro řady: $= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-nx} dx = \left| \begin{matrix} u=x & u'=1 \\ v'=e^{-nx} & v=-\frac{1}{n} e^{-nx} \end{matrix} \right|$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[-\frac{1}{n} x e^{-nx} \right]_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{e^{-nx}}{n^2} \right]_0^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{6}}}$

⑥ $\int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1-x^2} dx = \int_0^1 \frac{-\ln x}{1-x^2} dx = - \int_0^1 \ln x \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} dx = - \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \ln x \cdot x^{2n} dx$

$-\ln x \geq 0, x^{2n} \geq 0 \Rightarrow$ Levi: $= - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \ln x \cdot x^{2n} dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x & v'=x^{2n} \\ u'=\frac{1}{x} & v=\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{matrix} \right|$

$= - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\ln x \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} \right)$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8}}}$

⑦ $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x} \cdot \frac{1}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx} dx$ ⑧

$x^3 e^{-nx} \geq 0 \Rightarrow$ Lévi: $= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx$ 3x per partes

$= \sum \int \frac{3x^2 e^{-nx}}{n} dx = \sum \int \frac{6x e^{-nx}}{n^2} dx = \sum \int \frac{6 e^{-nx}}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^4} = \frac{\pi^4}{15}$