

Henri Lebesgue a jeho integrál

Lebesgueova a Léviho věta

Spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-nx} x^2 dx$

Rozvinutím vhodné funkce do řady spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

5. $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx \quad \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$
6. $\int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1-x^2} dx \quad \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$
7. $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90} \right)$

Integrály závislé na parametru

8. Ukažte, že následující integrály jsou spojitými funkcemi proměnné na dané množině:

a) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a (\pi - x)^a} dx, a < 2$

$$\text{b) } \int_0^2 x^2 \cos ax \, dx, \quad -\infty < a < \infty$$

$$\text{c) } \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a} \, dx, \quad 1 < a < \infty$$

Zjistěte, pro které hodnoty parametru integrál konverguje, a spočtěte jej:

$$9. \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)} \, dx$$

$$10. \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} \, dx$$

$$11. \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$$

$$12. \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx$$

$$13. \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} \, dx$$

$$14. \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx$$

$$15. \int_0^\infty e^{-ax^2} \cosh bx \, dx$$

$$16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a \sin^2 x)}{\sin^2 x} \, dx$$

$$17. \int_0^\pi \ln(a \pm b \cos x) \, dx$$

$$18. \int_0^\infty x e^{-ax} \cos bx \, dx$$

$$19. \int_0^\infty e^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} \, dx$$

$$20. \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sinh x}{x} dx$$

$$21. \int_0^1 x^{-\alpha} \ln^n x dx, n \in \mathbb{N}_0$$

$$22. \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x) dx$$

$$23. \int_{x>0, y>0} e^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})} x^{-1/3} y^{-2/3} dx dy$$

Doplněním vhodného parametru spočtete:

$$24. \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx$$

$$25. \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$$

26. Vyšetřete průběh funkce na jejím definičním oboru:

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$$

Integrály závislé na parametru

(1)

Věta (o spojitosti): Necht' $A \subset \mathbb{R}$ a $\alpha_0 \in A$ je vnitřní bod A . Necht' $f: X \times A \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje

- (i) $\forall \alpha \in A: x \mapsto f(x, \alpha)$ je měřitelná
- (ii) pro s.v. $x \in X: \alpha \mapsto f(x, \alpha)$ je spojitá v α_0
- (iii) $\exists g \in L^1: |f(x, \alpha)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$ a $\forall \alpha \in A$.

Pak $x \mapsto f(x, \alpha) \in L^1 \forall \alpha \in A$ a funkce $\alpha \mapsto \int_X f(x, \alpha) dx$ je spojitá v α_0 .

Věta (o limite): Necht' $A \subset \mathbb{R}$ a $\alpha_0 \in A$ je vnitřní bod A . Necht' $f: X \times (A \setminus \{\alpha_0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje

- (i) $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}: x \mapsto f(x, \alpha)$ je měřitelná
- (ii) pro s.v. $x \in X: \alpha \mapsto f(x, \alpha)$ existují vlastní limity $F(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha)$
- (iii) $\exists g \in L^1: |f(x, \alpha)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$ a $\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$.

Pak $x \mapsto f(x, \alpha) \in L^1 \forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$, $F \in L^1$ a platí $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_X f(x, \alpha) dx = \int_X F(x) dx$

Věta (o derivaci): Necht' $A \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Necht' $f: X \times A \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje

- (i) $\forall \alpha \in A: x \mapsto f(x, \alpha)$ je měřitelná
- (ii) pro s.v. $x \in X$ a $\forall \alpha \in A \exists$ (vlastní) $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$
- (iii) $\exists g \in L^1: \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$ a $\forall \alpha \in A$
- (iv) $\exists \alpha_0 \in A: x \mapsto f(x, \alpha_0) \in L^1$.

Pak $x \mapsto f(x, \alpha) \in L^1 \forall \alpha \in A$, funkce $\varphi: \alpha \mapsto \int_X f(x, \alpha) dx$ má na A vlastní

derivaci a $\varphi'(\alpha) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx$.

Obvykle v příkladech: měřitelnost plyne ze spojitosti.

$$\text{8a)} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a (\pi-x)^a} dx \quad a < 2$$

Pozorování: $a \leq 0: f(x, a)$ je omezená a spojitá, majoranta např. $g(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2a}$ na intervalu $a \in (-A, 0]$. Pro $a \rightarrow -\infty$ je $f(\frac{\pi}{2}, a) \rightarrow +\infty$ (i na okolí tohoto bodu). Ale dostáváme spojitost na každém intervalu typu $(-A, 0]$.

Pro $a > 0$ máme problémy v krajních bodech. Majorantu tak hledáme zvlášť

$$\text{na } I_1 = (0, \delta) \quad I_2 = (\delta, \pi - \delta) \quad I_3 = (\pi - \delta, \pi)$$

Na I_2 ležee $|f(x,a)| \leq K$, ~~$K = \frac{1}{\delta^2}$~~ (2)

Napr $\left| \frac{\sin x}{x^a (\pi-x)^a} \right| \leq \frac{1}{\delta^a (\pi-\delta)^a} \leq \frac{1}{\delta^{2a}} \leq \frac{1}{\delta^4}$
 protože $a < 2$.

Na I_1 : $|f(x,a)| \leq \underbrace{\left| \frac{\sin x}{x} \right|}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{x^{a-1}} \cdot \frac{1}{(\pi-x)^a} \leq \frac{1}{x^{a-1}} \cdot \frac{1}{(\pi-\delta)^a} \leq \frac{1}{x^{a-1}}$

kde jsme omezili $a \in (0, a_0]$, a_0 je lib. číslo tak, že $a_0 < 2$, tj. $a_0 - 1 < 1$
 a proto $\left(\frac{1}{x}\right)^{a_0-1}$ je integrovatelná majoranta

Podobně I_3 : $|f(x,a)| \leq \left| \frac{\overbrace{\sin(\pi-x)}^{=\sin x}}{\pi-x} \right| \cdot \frac{1}{x^a} \cdot \frac{1}{(\pi-x)^{a-1}} \leq \frac{1}{(\pi-x)^{a_0-1}}$, což je opět integrovatelná

$g := \max \left\{ \frac{1}{x^{a_0-1}}, \frac{1}{\delta^4}, \frac{1}{(\pi-x)^{a_0-1}} \right\}$ je majoranta na celém $(0, \pi)$

$\Rightarrow F(a) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a (\pi-x)^a} dx$ je spojitá na $[-A, a_0]$ pro lib. $A > 0$, $a_0 < 2$, tj.
 je spojitá na $(-\infty, 2)$

8b) $\int_0^2 x^2 \cos(ax) dx$ $a \in \mathbb{R}$

- měřitelnost a spojitost triviální (stejně tak v 8a)
- Majoranta: $|\cos ax| \leq 1 \Rightarrow |x^2 \cos ax| \leq x^2 \in L^1(0,2) \Rightarrow$ spojitost pro $a \in \mathbb{R}$.

8c) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a} dx$, $1 < a < \infty$

- měřitelnost v x , spojitost v a triviální
- majoranta: pro $a \geq a_0$ ~~$a_0 \in (1, \infty)$~~ $a_0 \in (1, \infty)$ t.č.

$\left| \frac{\cos x}{x^a} \right| \leq \frac{1}{x^{a_0}}$, což je integrovatelné na $(1, \infty) \Rightarrow F(a) = \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a} dx \in C([a_0, \infty))$

$\forall a_0 > 1 \Rightarrow F(a) \in C((1, \infty))$

9) $\int_0^\infty \frac{\arctg ax}{x(1+x^2)} dx =: I(a)$. Myšlenka: derivace arctg dá racionální fci, tu umíme zintegrovat.

$I'(a) = (\text{po ověření předpokladů, viz níže}) = \int_0^\infty \frac{\frac{\partial}{\partial a}(\arctg ax)}{x(1+x^2)} dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+(ax)^2)} dx$

$a=1$: $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{x}{1+x^2} \right]_0^\infty}_{=0} = \frac{1}{2} [\arctg x]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$

$a \neq 1$: Rozklad na PZ: $\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+a^2x^2} = \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{a^2}{1+a^2x^2} \right) \cdot \frac{1}{1-a^2}$

(problém i pro $a = -1$, tak řešíme necht' $a > 0$)

$\Rightarrow I'(a) = \frac{1}{1-a^2} \cdot \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} - a \int_0^\infty \frac{a}{1+a^2x^2} dx \right) = \frac{1}{1-a^2} \left(\frac{\pi}{2} - a \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}$

Všimneme si, že $I'(1) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}$ pro $a=1$ také, tedy $I'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}$ platí pro $a > 0$.

$I(a) = I(0) + \int_0^a I'(\tilde{a}) d\tilde{a}$, tj. $I(a) = \int_0^a \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\tilde{a}} d\tilde{a} = \frac{\pi}{2} \cdot \ln(1+a)$, $a \geq 0$
 " 0 triv.

Pro $a < 0$ si všimneme $I(a) = -I(-a)$ z lichosti fce $\arctg(ax)$, proto pro $a < 0$ je $I(a) = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln(1-a)$, $a < 0$

- Předpoklady věty:
- měřitelnost a existence derivate triv.
 - $\exists a_0$ t.ž. $x \mapsto f(x, a_0) \in L^1$ ano, např. $a_0 = 0$, $f(x, 0) = 0 \in L^1$
 - majoranta: $\left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| = \frac{1}{(1+x^2)(1+a^2x^2)} \leq \frac{1}{1+x^2} \in L^1(0, \infty)$ ✓

Alternativní postup: Pročže $f(x, 0) = 0$, platí $f(x, a) = \int_0^a \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\arctg ax}{x(1+x^2)} \right) d\alpha$

a proto $I(a) = \int_0^\infty \int_0^a \frac{1}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)} dx d\alpha = \int_0^a \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)} dx d\alpha = \int_0^a \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2} \ln(1+a)$ ($a > 0$)
 ↑ Fubini

10) $I(a, b) := \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$

Přes Fubiniho: $e^{-ax^2} - e^{-bx^2} = \left[e^{-cx^2} \right]_{c=b}^{c=a} = \int_b^a \frac{\partial}{\partial c} (e^{-cx^2}) dc = \int_b^a -x^2 e^{-cx^2} dc$

$\Rightarrow I(a, b) = \int_0^\infty \int_b^a -x^2 e^{-cx^2} dc dx = \int_0^\infty \int_a^b x^2 e^{-cx^2} dc dx = \int_a^b \int_0^\infty x^2 e^{-cx^2} dx dc = \int_a^b \frac{1}{2c} dc = \frac{1}{2} (\ln|b| - \ln|a|) = \ln \sqrt{\frac{b}{a}}$! Pozor!

Přepočít mezi při substituci $y = cx^2$ platí jen pro $c > 0$!! Pro $c < 0$ bychom dostali $\int_0^\infty e^{-y} dy$, to není konečný integrál. $c = 0$ je také problém: $\int_0^\infty x \cdot e^0 dx = \infty$!!

Vše projde pouze pokud je $c > 0$, tj. $a > 0, b > 0$. Pak $I(a, b) = \ln \sqrt{\frac{b}{a}}$.

To vidíme ostatně už na začátku: $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{x} dx$ konverguje u ∞ jen pro $a > 0$

Konvergence u nuly: $e^{-ax^2} \sim 1$, což je zřejmý problém, ale $e^{-ax^2} - e^{-bx^2} \sim x^2$, což už je OK.

Pomocí věty o derivaci:

$$\frac{\partial I}{\partial a} = (\text{po ověření předpokladů}) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} \right) dx = \int_0^\infty -x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a}$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = (-1) = \int_0^\infty x e^{-bx^2} dx = \frac{1}{2b}$$

$$\Rightarrow I = \int -\frac{1}{2a} da + f(b) = -\frac{1}{2} \ln a + f(b) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \frac{\partial I}{\partial b} = f'(b) = \frac{1}{2b} \Rightarrow f(b) = \frac{1}{2} \ln b + C \end{array} \right\} I = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a} + C = \ln \sqrt{\frac{b}{a}} + C$$

ale očividně $I(a, a) = 0 = \ln \sqrt{\frac{a}{a}} + C \Rightarrow C = 0. \Rightarrow \underline{I(a, b) = \ln \sqrt{\frac{b}{a}}}$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv. $(\frac{\partial f}{\partial a} \text{ a } \frac{\partial f}{\partial b})$

• $\exists a_0, b_0$ t.č. $x \mapsto f(x, a_0, b_0) \in L^1$: $a_0 = b_0 = 1$ např.

• majoranty: $|\frac{\partial f}{\partial a}| \leq x \cdot e^{-a_0 x^2}$ pro $a \geq a_0$, $a_0 > 0$ lib.

a podobně $|\frac{\partial f}{\partial b}| \leq x \cdot e^{-b_0 x^2}$ pro $b \geq b_0$, $b_0 > 0$ lib.

$\Rightarrow$ Větu lze používat na $[a_0, \infty) \times (b_0, \infty)$ pro lib. $a_0, b_0 > 0$, tj. na $(0, \infty) \times (0, \infty)$

(11) DÚ

(12) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

Pokud $x=0$ potřebujeme $a, b > -1$ ke konvergenci integrálu.

Pokud $x=1$ $a=b$ je OK, $a \neq b$: (BůHO $b > a$): $\frac{x^a \cdot (x^{b-a} - 1)}{\ln x}$, $\ln x \sim x-1$

$\frac{x^{b-a} - 1}{x-1}$ je integrovatelné u $x=1$

!! Používáme $c > -1$

Tedy pro $a, b > -1$: $I(a, b) = \int_0^1 \int_a^b \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{x^c}{\ln x} \right) dc dx = \int_0^1 \int_a^b x^c dc dx \stackrel{\text{FUB}}{=} \int_a^b \int_0^1 x^c dx dc \stackrel{\downarrow}{=} \int_a^b \frac{1}{c+1} dc = \underline{\ln \frac{b+1}{a+1}}$

Lze i větu o derivaci jako v (9) a (10). Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivaci $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}$ triv

• ~~$f(x, 1, 1) = 0 \in L^1(0, 1)$ OK~~

• $f(x, 1, 1) = 0 \in L^1(0, 1)$ OK

• $|\frac{\partial f}{\partial a}| = x^a \leq x^{a_0}$ pro $a \geq a_0 > -1$ je integrovatelné

• $|\frac{\partial f}{\partial b}| = x^b \leq x^{b_0}$ pro $b \geq b_0 > -1$

$\Rightarrow$ Větu lze použít na $(a_0, \infty) \times (b_0, \infty)$, tj. na $(-1, \infty) \times (-1, \infty)$

13 $I(a,b) := \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \cdot \operatorname{arctg} bx}{x^2} dx$

5

Konvergence integrálu : $w \infty : f(a,b,x) \sim \frac{1}{x^2}$ OK

$w 0 : \frac{\operatorname{arctg} ax}{x} \sim 1, \frac{\operatorname{arctg} bx}{x} \sim 1$ OK $\forall a,b \in \mathbb{R}$

Symetrie : $I(a,b) = -I(a,-b) = -I(-a,b) = I(-a,-b)$ } dále jen pro $a,b > 0$.
 $I(a,0) = I(0,b) = 0$

$\frac{\partial I}{\partial a} = (\text{předpoklady}) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+a^2x^2)} dx$... vidíme, že $\frac{\partial I}{\partial a}(a,0) = 0$.

$\frac{\partial^2 I}{\partial a \partial b} = (-1) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)} dx = (\text{podobně jako v příkladu 9}) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+b}$

platí pro $a \neq b$; pro $a=b$ - je potřeba ale počítat zvlášť.

$\frac{\partial I}{\partial a}(a,b) = \int_0^b \frac{\partial^2 I}{\partial a \partial \beta}(a,\beta) d\beta + \underbrace{\frac{\partial I}{\partial a}(a,0)}_{=0} = \int_0^b \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+\beta} d\beta = \frac{\pi}{2} \cdot \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$

$I(a,b) = \underbrace{I(0,b)}_{=0} + \int_0^a \frac{\partial I}{\partial \alpha}(\alpha,b) d\alpha = \int_0^a \frac{\pi}{2} \cdot \ln\left(1 + \frac{b}{\alpha}\right) d\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^a \ln\left(\alpha + \frac{b}{\alpha}\right) - \ln \alpha d\alpha$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \left(\left[(\alpha+b) \ln(\alpha+b) - (\alpha+b) \right]_0^a - \left[\alpha \ln \alpha - \alpha \right]_0^a \right) =$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \left((a+b) \ln(a+b) - (a+b) - b \ln b + b - a \ln a + a \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \left((a+b) \ln(a+b) - a \ln a - b \ln b \right)$

To je pro $a,b > 0$. Do zbylých kvadrantů prodloužíme symetriemi a na osách dodefinujeme nulou.

Předpoklady : • měřitelnost a existence derivací OK

• $f(0,0,x) = 0 \in L^1(\mathbb{Q}, \infty)$, $\frac{\partial f}{\partial a}(a,0,x) = 0 \in L^1$

• $\left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| = \left| \frac{1}{1+a^2x^2} \right| \cdot \left| \frac{\operatorname{arctg} bx}{x} \right| \leq |b| \frac{1}{1+a^2x^2} \leq \frac{B}{1+\varepsilon^2x^2}$ pro $b \in (-B,B)$
 $a \in (-a_1-\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$

• $\left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| = \text{podobně} \leq \frac{A}{1+\varepsilon^2x^2}$ pro $a \in (-A,A)$
 $b \in (-b_1-\varepsilon), (\varepsilon, \infty)$

• $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} \right| = \left| \frac{1}{1+a^2x^2} \right| \left| \frac{1}{1+b^2x^2} \right| \leq \frac{1}{(1+\varepsilon^2x^2)^2}$ pro $(a,b) \in (-\infty, \varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$

Větu lze použít na $((-A, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, A)) \times ((-B, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, B))$ pro lib. A, ε, B , tj.

na $((-\infty, 0) \cup (0, \infty)) \times ((-\infty, 0) \cup (0, \infty))$

(14) $I(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx$ Pro konvergenci potřebujeme $a > 0, b \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial I}{\partial b} = (!) = \int_0^\infty -x e^{-ax^2} \sin bx \, dx = \left| \begin{array}{l} u' = x e^{-ax^2} \\ u = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} v = \sin bx \\ v' = \cos bx \cdot b \end{array} \right| = - \underbrace{\left[-\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin bx \right]_0^\infty}_{=0} + \frac{b}{2a} I(a,b)$

Tj. $\frac{\partial I}{\partial b} = -\frac{b}{2a} I \dots$ Dif. rovnice!

$\ln |I| = -\frac{b^2}{4a} + C(a)$

$\Rightarrow I = \tilde{C}(a) \cdot e^{-\frac{b^2}{4a}}$

$I(a,0) = \tilde{C}(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{a} x \\ dy = \sqrt{a} dx \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv.

• $f(1,0,x) = e^{-x^2} \in L^1$ (obecně $f(a,0,x) = e^{-ax^2} \in L^1 \quad \forall a > 0$)

• majoranta: $\left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| = x e^{-ax^2} |\sin bx| \leq x e^{-ax^2} \leq x e^{-a_0 x^2}$ pro $a \geq a_0 > 0$.
 $\wedge L^1(0,\infty)$

$\Rightarrow$ Větu lze použít na $[a_0, \infty) \times \mathbb{R}$, tedy na $(0, \infty) \times \mathbb{R}$.

(15) $I(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cosh bx \, dx$ Připomeň: $\cosh bx = \frac{1}{2}(e^{bx} + e^{-bx})$
Člen ax^2 je silnější než $\pm bx \Rightarrow$ pro konvergenci $a > 0, b \in \mathbb{R}$.

Analogicky jako (14): $\frac{\partial I}{\partial b} = (!) = \frac{b}{2a} I$

$\ln I = \frac{b^2}{4a} + C(a)$

$I = \tilde{C}(a) e^{\frac{b^2}{4a}}$

$I(a,0) = \tilde{C}(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv.

• $f(a,0,x) = e^{-ax^2} \in L^1 \quad \forall a > 0$

• majoranta: $\left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| = x e^{-ax^2} |\sinh bx| \leq x e^{-ax^2 + |b|x} \leq x e^{-a_0 x^2 + Bx} \in L^1(0,\infty)$
pro $a \geq a_0 > 0$ a $b \in [-B, B]$

$\Rightarrow$ Větu lze použít na $[a_0, \infty) \times [-B, B]$ $\forall a_0 > 0, \forall B > 0 \Rightarrow$ na $(0, \infty) \times \mathbb{R}$.

(16) $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+a \sin^2 x)}{\sin^2 x} dx$ Konvergence u nuly: OK, $\ln(1+a \sin^2 x) \sim a \sin^2 x$
u $\pi/2$: žádný problém.

Ale pro dobře definovanou fci potřebujeme $1+a \sin^2 x > 0$ na $(0, \pi/2)$, tj. $1+a > 0 \Rightarrow \underline{a > -1!}$

$$I'(a) = (!) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a\sin^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \tan x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ t^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ t^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \cos^2 x = \frac{1}{t^2 + 1} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{t^2 + 1} \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{at^2}{t^2 + 1}} \cdot \frac{1}{t^2 + 1} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + (a+1)t^2} dt = \left| \begin{array}{l} s = \sqrt{a+1} t \\ ds = \sqrt{a+1} dt \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a+1}} \cdot \frac{1}{1+s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{a+1}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I(0) = 0 \text{ o\v{e}vidne} \Rightarrow I(a) = \int_0^a I'(a) da = \int_0^a \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+1}} da = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot [\sqrt{a+1}]_0^a$$

$$I(a) = \pi(\sqrt{a+1} - 1)$$

Platí i pro $a = -1$. Konvergence integrálu $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x} dx$ w $\pi/2$ lehce.

Dále argument L\u00e9viho v\u00e9tov: $I(-1) = \lim_{a \rightarrow -1+} I(a) = -\pi$. Monotonie: $f(a, x)$ je klesaj\u00edc\u00ed v prom\u00e9nn\u00e9 a , ale z\u00e1porn\u00e1; L\u00e9vi lze pou\u017eit na $-f(a, x)$, to j\u00ed rostouc\u00ed a kladn\u00e1, tak\u017ee OK.

- P\u00e1edpoklady:
- m\u00e9ritelnost a ex. derivace triv
 - $f(0, x) = 0 \in L^1(0, \pi/2)$

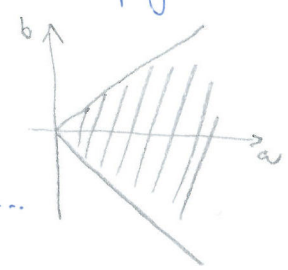
• majoranta $\left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| = \frac{1}{1+a\sin^2 x} \leq \begin{cases} 1 & \text{pro } a \geq 0 \\ \frac{1}{1+a_0} & \text{pro } a \in [a_0, 0] \text{ } a_0 > -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ V\u00e9tu lze pou\u017eit na $[a_0, \infty)$ pro $\forall a_0 > -1$, tj. na $(-1, \infty)$.

(17) $I(a, b) = \int_0^{\pi} \ln(a + b \cos x) dx$
 (Pozorov\u00e1n\u00ed: $\int_0^{\pi} \ln(a - b \cos x) dx = I(a, -b)$)

Pot\u00edebujeme $a + b \cos x > 0$ na $(0, \pi)$, tj. $a + b > 0$ a $a - b > 0$.

Tedy nap\u00ed. $a > 0, b \in (-a, a)$



$$\frac{\partial I}{\partial a} = (!) = \int_0^{\pi} \frac{1}{a + b \cos x} dx \left| t = \tan \frac{x}{2} \right| = \dots = \frac{2}{a+b} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} t^2} dt = \left| v = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} t \right| = \dots$$

$$\dots = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} [\arctg v]_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\Rightarrow I(a, b) = \int \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} da + f(b) = \pi \int \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \cdot |b|} da = \left| t = \frac{a}{b} \right| = \pi \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = \pi \cdot \operatorname{arccosh} t$$

$$\Rightarrow I(a, b) = \pi \cdot \operatorname{arccosh} \frac{a}{b} + f(b) = \pi \cdot \ln \left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \right) + f(b)$$

$$a=b: \operatorname{arccosh} \frac{a}{a} = \operatorname{arccosh} 1 = 0 \Rightarrow f(b) = I(b, b) = \int_0^{\pi} \ln(b + b \cos x) dx = \pi \cdot \ln b + \int_0^{\pi} \ln(1 + \cos x) dx$$

TRIKEM: 1) $\int_0^{\pi} \ln(1 + \cos x) dx = \int_0^{\pi} \ln(2 \cos^2 \frac{x}{2}) dx = \int_0^{\pi} (\ln 2 + 2 \ln \cos \frac{x}{2}) dx = \pi \ln 2 + 4 \int_0^{\pi/2} \ln \cos t dt$

2) $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\frac{\pi}{2} - t)) dt = \int_0^{\pi/2} \ln \sin u du \quad (u = \frac{\pi}{2} - t)$. Ozna\u00e1me $J = \int_0^{\pi/2} \ln \sin t dt$

Pak 3) $2J = \int_0^{\pi/2} \ln \sin t + \ln \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{\sin 2t}{2} \right) dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin s ds = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + J$

Použili jsme symetrii fce $\sin x$, tj. $\int_0^\pi \ln \sin x = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin x$!

$$\Rightarrow J = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 \Rightarrow \int_0^\pi \ln(1+\cos x) dx = \pi \ln 2 + 4J = \pi \ln 2 - 2\pi \ln 2 = -\pi \ln 2$$

$$I(a,b) = \pi \ln\left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right) + \pi \ln b - \pi \ln 2 = \underline{\pi \cdot \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}\right)}$$

Výsledek nezávisí na znaménku $b \Rightarrow$ platí pro $b \in [-a, a]$. Původně na otevřeném intervalu, ale $b=a$ jsme právě spočítali také.

Předpoklady věty: • měřitelnost a existence derivace triv.

• $f(1,1,x) = \ln(1+\cos x) \in L^1$ (spočítali jsme)

• $\left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| = \frac{1}{|a+b\cos x|} \leq \frac{1}{a-|b|} \leq \frac{1}{a_0}$ pro $a \geq a_0 > 0$
 $a \in (-a+a_0, a-a_0)$
 $\uparrow$
 $L^1(0,\pi)$

Věta platí na ~~$(0,\pi)$~~

množině $\{(a,b) : a \geq a_0, b \in (-a+a_0, a-a_0)\} \quad \forall a_0 > 0$

tedy na $\{(a,b) : a > 0, b \in (-a,a)\}$.

(18) $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos bx \, dx =: I(a,b)$ Pro konvergenci integrálu $a > 0, b \in \mathbb{R}$

Pozorování: $x e^{-ax} = -\frac{\partial}{\partial a}(e^{-ax})$ Proto $I(a,b) = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}(e^{-ax} \cos bx) \, dx = (!)$

$= -\frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = -\frac{\partial}{\partial a} J(a,b)$. Spočítáme $J(a,b)$ (2x per partes)

$$J(a,b) = \underbrace{\left[e^{-ax} \frac{\sin bx}{b} \right]_0^\infty}_{=0} + \frac{a}{b} \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{a}{b} \cdot \left[-e^{-ax} \frac{\cos bx}{b} \right]_0^\infty - \frac{a^2}{b^2} J(a,b) = \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} J(a,b)$$

$$\Rightarrow J(a,b) = \frac{a}{a^2+b^2} \Rightarrow I(a,b) = -\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{a}{a^2+b^2} \right) = -\frac{a^2+b^2-2a^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2} \quad \text{pro } a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Předpoklady: pro $f(a,b,x) = e^{-ax} \cos bx$!! • měřitelnost a ex. derivace triv

• $f(1,b,x) \in L^1$ triviálně

• $\left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \leq x e^{-ax} \leq x e^{-a_0 x}$ pro $a \geq a_0 > 0$.

Věta platí na $[a_0, \infty) \times \mathbb{R}$ ~~$(0,\infty) \times \mathbb{R}$~~ $\forall a_0 > 0$, tedy na $(0,\infty) \times \mathbb{R}$.

(19) $\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \frac{1-\cos x}{x} \, dx =: I(a)$ Opět potřebujeme $a > 0$ pro konvergenci integrálu

$$I'(a) = (!) = -\int_0^\infty e^{-ax} \cdot (1-\cos x) \, dx = \left[\frac{e^{-ax}}{a} \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-ax} \cos x \, dx = -\frac{1}{a} + J(a,1), \text{ kde } J(a,b) = \frac{a}{a^2+b^2}$$

je z příkladu (18) $\Rightarrow I'(a) = -\frac{1}{a} + \frac{a}{a^2+1} \Rightarrow I(a) = -\ln a + \frac{1}{2} \ln(a^2+1) + C = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right) + C$

Předpoklady: • měřitelnost a ex-derivace triv.

$$\bullet f(1, x) = e^{-x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x} \in L^1((0, \infty))$$

$$\bullet \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| = e^{-ax} \cdot |1 - \cos x| \leq \underbrace{2e^{-a_0 x}}_{\in L^1} \quad \text{pro } a \geq a_0 > 0$$

$\Rightarrow$ Věta platí na $[a_0, \infty)$ $\forall a_0 > 0 \Rightarrow$ na $(0, \infty)$.

Co konstanta?? Nemáme lehce $I(A) = B$ pro nějaké A , musíme jít dál.

Lehce ukažeme spojitost $I(a)$ na $(0, \infty)$ a použijeme

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = C = \int_0^{\infty} \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \underline{I = \ln \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}}$$

$$(20) \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sinh x}{x} dx =: I(a) \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \dots e^{-ax} \cdot e^x \Rightarrow a > 1 \text{ pro konvergenci integrálu!}$$

$$I'(a) = (!) = - \int_0^{\infty} e^{-ax} \sinh x dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{(1-a)x} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{(-1-a)x} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a+1} \cdot$$

$$\Rightarrow I(a) = \frac{1}{2} \ln(a+1) - \frac{1}{2} \ln(a-1) + C = \ln \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} + C$$

$$\text{Opět spojitost } I(a): \lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = C = \int_0^{\infty} \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-ax} \frac{\sinh x}{x} dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0$$

$$\Rightarrow \underline{I(a) = \ln \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}}$$

Předpoklady: • měřitelnost a ex-derivace triviální

$$\bullet f(2, x) = e^{-2x} \frac{\sinh x}{x} \in L^1((0, \infty))$$

$$\bullet \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \leq \frac{e^{-ax} \cdot e^x}{x} \leq \frac{e^{-(a_0+1)x}}{x} \quad \forall a \geq a_0 > 1 \quad \underbrace{\in L^1((0, \infty))}$$

Spojitést: f spojitá v a

$$|f| \leq \frac{e^{-(a_0+1)x}}{x} \in L^1 \quad \forall a \geq a_0 > 1$$

} Obě věty na $[a_0, \infty)$ $\forall a_0 > 1$
 $\Rightarrow$ na $(1, \infty)$.

$$(21) I_n(a) = \int_0^1 x^{-a} \ln^n x dx \quad \text{Pro konvergenci potřebuji } a < 1 \text{ nezávisle na } n.$$

$$\text{Zavedeme } J(a) = \int_0^1 x^{-a} dx = \int_0^1 e^{-a \ln x} dx. \text{ Pak (!) } J'(a) = \int_0^1 -x^{-a} \ln x dx.$$

$$J''(a) = \int_0^1 x^{-a} \ln^2 x dx \quad \text{atd.}$$

$$\text{Tedy } I_n(a) = (-1)^n J^{(n)}(a)$$

$$\text{Zkouška } J(a) = \left[\frac{x^{1-a}}{1-a} \right]_0^1 = \frac{1}{1-a} \Rightarrow J'(a) = -\frac{1}{(1-a)^2}, J''(a) = \frac{2}{(1-a)^3}, \dots$$

$$\Rightarrow J^{(n)}(a) = \frac{n!}{(1-a)^{n+1}} \Rightarrow I_n(a) = (-1)^n \frac{n!}{(1-a)^{n+1}}$$

Předpoklady: $f_n(x) = x^{-a} \ln^n x$: • měřitelnost a ex. derivace triv.
• $f_n(-1, x) = x \ln^n x \in L^1((0, 1))$
• $\left| \frac{\partial f_n}{\partial a} \right| \leq C \cdot x^{-a+\varepsilon} \leq C \cdot x^{-a_0-\varepsilon} \in L^1$ pro $a \leq a_0 < 1-\varepsilon$
a lib. $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ Věta platí pro $(-\infty, a_0)$ $\forall a_0 < 1-\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$
Tedy pro $(-\infty, a_0)$ $\forall a_0 < 1$, tedy pro $(-\infty, 1)$.

22) $I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2 \tan^2 x) dx$ Konvergence: u 0 není problém nikdy
u $\pi/2$: $\cos x \sim x^{-1/2}$, tj. $f \sim \ln\left(\frac{1}{(x-\pi/2)^2}\right)$
a to je integrovatelné.

Potřebujeme pouze $(a, b) \neq (0, 0)$ pro dobrou definici logaritmu.

Symetrie: Stačí uvažovat $a > 0, b > 0$.

$$\frac{\partial I}{\partial b} = (1) = \int_0^{\pi/2} \frac{2b \tan^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} dx = \left| t = \tan x \right| = \int_0^\infty \frac{2bt^2}{a^2 + b^2 t^2} \cdot \frac{dt}{t^2 + 1} = 2b \int_0^\infty \left(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{a^2}{b^2 t^2 + a^2} \right) \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} dt$$
$$= \frac{2b}{b^2 - a^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{b}t\right)^2} dt \right) = \frac{2b}{b^2 - a^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{b} \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{b+a}$$

$$I = \int \frac{\pi}{b+a} db = \pi \cdot \ln(b+a) + C(a)$$
$$b=a: I(a, a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \cdot (1 + \tan^2 x)) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \ln a^2 + \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1}{\cos^2 x} dx = \pi \ln a + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx$$
$$= \pi \ln a - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right) = \pi \ln(2a) + C(a)$$

VIZ PŘÍKLAD (17)

$$\Rightarrow \pi \ln 2 + \pi \ln a + C(a) = \pi \ln a + \pi \ln 2$$
$$\Rightarrow C(a) = 0 !!$$

$$\Rightarrow I = \pi \cdot \ln(b+a) \text{ pro } b > 0, a > 0, \text{ ze symetrie \& proto } \underline{I = \pi \cdot \ln(|a| + |b|)}$$

Na osách: $b=0: I(a, 0) = \int_0^{\pi/2} \ln a^2 dx = \pi \cdot \ln |a|$, tj. vzorec $\uparrow$ platí.

$$a=0: I(0, b) = \int_0^{\pi/2} \ln(b^2 \tan^2 x) dx = \pi \cdot \ln |b| + \int_0^{\pi/2} 2 \cdot \ln \tan x dx = \left| t = \tan x \right| = \pi \ln |b| + 2 \int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt$$

$$\text{TRIK: } \int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt}_{S = \frac{1}{t} :} + \int_1^\infty \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt$$
$$= \int_\infty^1 \frac{\ln \frac{1}{s}}{\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 1} \cdot \left(-\frac{1}{s^2}\right) ds = - \int_1^\infty \frac{\ln s}{s^2 + 1} ds \quad \left. \vphantom{\int_0^\infty} \right\} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt = 0 !!$$

$\Rightarrow$ vzorec platí i pro $a=0, b \neq 0$.

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv
• $f(1, 1, x) \in L^1$... spočítali jsme
• majoranta: $\left| \frac{\partial I}{\partial b} \right| \leq \frac{2}{b} \leq \frac{2}{b_0}$ pro $b \geq b_0 > 0, a > 0$

} Větu lze použít pro $a > 0, b \in [b_0, \infty) \neq b_0 > 0$
Tj. pro $b \in (0, \infty)$

(23) $I(a) = \int_{x>0} \int_{y>0} \frac{e^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})}}{x^{-1/3} y^{-2/3}} dx dy$

Aby exp nevybočila na osách, potřebujeme $a \geq 0!!$

$$I'(a) = (!) = \int_{x>0} \int_{y>0} -\frac{3a^2}{xy} e^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})} x^{-1/3} y^{-2/3} dx dy = -3a^2 \int_{x>0} \int_{y>0} e^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})} x^{-4/3} y^{-5/3} dx dy =$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{Fub}}{=} -3a^2 \int_0^\infty e^{-x} x^{-4/3} \left(\int_0^\infty e^{-y} \cdot e^{-\frac{a^3}{xy}} \cdot y^{-5/3} dy \right) dx \quad \text{Vnitřní integrál: substit. } t = \frac{a^3}{xy} \Rightarrow y = \frac{a^3}{xt} \\ & \quad dt = -\frac{a^3}{xy^2} dy \\ & \quad dy = -\frac{xy^2}{a^3} dt = -\frac{x}{a^3} \cdot \frac{a^6}{x^2 t^2} dt = -\frac{a^3}{xt^2} dt \\ & = -3a^2 \int_0^\infty e^{-x} x^{-4/3} \left(\int_0^\infty e^{-\frac{a^3}{xt}} \cdot e^{-t} \cdot \left(\frac{a^3}{xt}\right)^{-5/3} \cdot \left(-\frac{a^3}{xt^2}\right) dt \right) dx \\ & = -3a^2 \int_0^\infty e^{-x} x^{-4/3} \left(\int_0^\infty e^{-t} e^{-\frac{a^3}{xt}} \cdot a^2 \cdot x^{2/3} t^{1/3} dt \right) dx \\ & \stackrel{\text{Fub}}{=} -3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x} e^{-t} e^{-\frac{a^3}{xt}} x^{-2/3} t^{1/3} dt dx = -3 \int_{x>0} \int_{t>0} e^{-(x+tt+\frac{a^3}{xt})} x^{-2/3} t^{1/3} dx dt = -3I \end{aligned}$$

(stačí přejmenovat proměnné, int. obor je symetrický v x a y)

$$\Rightarrow I' = -3I \Rightarrow I = C \cdot e^{-3a} \quad C > 0 \text{ protože } I \text{ je očitě kladné.}$$

$$I \text{ spojitá (!)} \quad I(0) = \left(\int_{x>0} e^{-x} x^{-1/3} dx \right) \cdot \left(\int_{y>0} e^{-y} y^{-2/3} dy \right) = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \text{ kde}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \text{ pro } z > 0 \text{ je zokresněný faktoriál} \quad (\Gamma(n) = (n-1)!)$$

$$\text{Platí } \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-3a}}$$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv

$$\bullet f(1, x, y) \leq e^{-x-y} x^{-1/3} y^{-2/3} \in L^1 \Rightarrow f(1, x, y) \in L^1$$

$$\bullet \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \dots \text{odkřídlejší! Platí: } \exists \lambda \bar{e}^\lambda \leq C \text{ pro } \lambda \in (0, \infty)$$

$$\Rightarrow \frac{3a^2 e^{-\frac{a^3}{xy}}}{xy} \leq C \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \leq \frac{C}{a} \cdot e^{-x-y} x^{-1/3} y^{-2/3} \leq \underbrace{\frac{C}{a_0} e^{-x-y} x^{-1/3} y^{-2/3}}_{\in L^1} \text{ pro } a \geq a_0 > 0.$$

$$\text{Spojitosť: Majoranta pro } |f|: \leq e^{-x-y} x^{-1/3} y^{-2/3} \in L^1$$

$$\Rightarrow \text{Obě věty lze použít (derivaci pro } a \in (a_0, \infty) \forall a_0 \Rightarrow a \in (0, \infty)) \\ (\text{spojitosť pro } a \in [0, \infty))$$

24) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} dx$... očividně konverguje, u 0 problém není a u $\pi/2$ jde řešit l. mule.

$I := I(1)$, kde $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx$... konverguje $\forall a \in \mathbb{R}$ pro $a \neq 1$

$I'(a) = (!) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a^2 \tan^2 x} dx \quad | t = \tan x | = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+a^2 t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{a^2}{1+a^2 t^2} \right) \cdot \frac{1}{1-a^2} dt$

$= \frac{1}{1-a^2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1-a^2} \cdot a \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1-a}$ pro $a > 0, a \neq 1$. Zkusit záporné a nennulové,

stačí nám oškolit $a=1$. Pro $a=1$ je $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\pi}{4}$ (viz příklad 9) $\Rightarrow$ vzorec platí

$I(a) = \int I'(a) da = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) + C \quad \left. \begin{array}{l} I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) \\ I(0) = 0 = C \end{array} \right\} I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) \text{ a tedy } I = I_1 = \frac{\pi}{2} \ln 2$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace OK (pro $f(a, x) = \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x}$)

- $f(0, x) = 0 \in L^1$ OK
- $|\frac{\partial f}{\partial a}| \leq 1 \in L^1$ OK

25) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$... očividně konverguje, u $\infty \sim \frac{1}{x^2}$, u 0 omezená.

$I(a) := \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx \Rightarrow I'(a) = (!) = - \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \sin^4 x dx = -\frac{3}{8} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos 2x dx - \frac{1}{8} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos 4x dx$

Použijeme (14): $I'(a) = \underbrace{-\frac{3}{16} \sqrt{\frac{\pi}{a}}}_A + \underbrace{\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{1}{a}}}_B - \underbrace{\frac{1}{16} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{4}{a}}}_C$

$I(a) = \int A + \int B + \int C$

$\int A = -\frac{3}{16} \sqrt{\pi} \int a^{-1/2} da = -\frac{3}{8} \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{a}$

$\int B = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int a^{-1/2} e^{-\frac{1}{a}} da$... to není elementární integrál. Par partes: $u = e^{-1/a}, u' = \frac{e^{-1/a}}{a^2}, v' = a^{-1/2}, v = 2a^{1/2}$

$= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(2\sqrt{a} e^{-1/a} - 2 \int \frac{e^{-1/a}}{a^{3/2}} da \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(2\sqrt{a} e^{-1/a} + 4 \int e^{-b^2} db \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(2\sqrt{a} e^{-1/a} + 2\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \right)$
 $b = a^{-1/2}, db = -\frac{1}{2} a^{-3/2} da$
 $= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} b$

$\int C = -\frac{\sqrt{\pi}}{16} \int a^{-1/2} e^{-\frac{4}{a}} da = -\frac{\sqrt{\pi}}{16} \int 4^{-1/2} \tilde{a}^{-1/2} e^{-\frac{1}{\tilde{a}}} \cdot 4 d\tilde{a} = -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \int \tilde{a}^{-1/2} e^{-\frac{1}{\tilde{a}}} d\tilde{a} = -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \left(2\sqrt{\tilde{a}} e^{-\frac{1}{\tilde{a}}} + 2\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{\tilde{a}}}\right) \right)$
 $a = 4\tilde{a}$

$\Rightarrow I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot \left(-3\sqrt{a} + 4\sqrt{a} e^{-1/a} - \sqrt{a} e^{-4/a} + 4\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) - 2\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right) \right) + C$

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow \infty} I(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot \left[\sqrt{a} \cdot (-3 + 4e^{-1/2} - e^{-1/2}) + \underbrace{4\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{2\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)}_{\rightarrow 0} \right] \right) + C \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{a} \cdot \left(-3 + 4 \cdot \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{2}\right)\right) \right) + C \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{a} \cdot \left(\frac{2}{a^2} - \frac{8}{a^2} + o\left(\frac{1}{a^2}\right) \right) + C = C
 \end{aligned}$$

$$C = 0$$

$$\text{ale } \lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = (!) = \int_0^{\infty} \lim_{a \rightarrow \infty} e^{-ax^2} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0$$

$$\text{Konečně } I(0) = \lim_{a \rightarrow 0+} I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot (4\sqrt{\pi} - 2\sqrt{\pi}) = \frac{\pi}{4}$$

Předpoklady: $f(a, x) = e^{-ax^2} \frac{\sin^4 x}{x^2}$:

- měřitelnost a ex. derivace OK
- $f(a, x) = e^{-ax^2} \frac{\sin^4 x}{x^2} \in L^1$ očividně
- $\left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \leq e^{-ax^2} \leq e^{-a_0 x^2} \quad \forall a \geq a_0 > 0$
- $|f| \leq e^{-ax^2} \leq e^{-a_0 x^2} \quad \forall a \geq a_0 > 0$

Spojnost i derivaci máme na $(a_0, \infty) \quad \forall a_0 > 0 \Rightarrow$ na $(0, \infty)$ (Spojnost i na $[0, \infty)$)

$$(26) F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$F(0) = 0 \quad F \text{ sudá' očividně}$$

$$\text{Konvergence integrálu: u } x=0: \frac{\ln(1-a^2 x^2)}{x^2} \sim -a^2, \sqrt{1-x^2} \text{ nevadí}$$

$$\Rightarrow \text{u } x=0 \text{ konverguje } \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\text{u } x=1: \sqrt{1-x^2} \sim \sqrt{1-x}, \text{ to je integrovatelné, ln neustodí.}$$

Pro dobrou definici potřebujeme $1-a^2 x^2 > 0$ na $(0, 1)$, tj. $1-a^2 > 0, |a| < 1$.

Krajní bod $a=1$ vyšetříme později. Nyní ze sudosti tedy $a \in (0, 1)$

$$F'(a) = (!) = \int_0^1 \frac{-2a}{(1-a^2 x^2) \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{Očividně } F'(0) = 0 \text{ a } F'(a) < 0 \text{ pro } a > 0 \\ F'(a) > 0 \text{ pro } a < 0$$

(integrované kladnou funkcí) $\Rightarrow a=0$ je bod lok. maxima

$$= -2a \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(1-a^2 x^2) \sqrt{1-x^2}}}_{f(a)}$$

$$f'(a) = (!) = \int_0^1 \frac{2ax^2}{(1-a^2 x^2)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\begin{aligned}
 F''(a) &= \int_0^1 \frac{-2(1-a^2 x^2) - 4a^2 x^2}{(1-a^2 x^2)^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{-2 - 6a^2 x^2}{(1-a^2 x^2)^2 \sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= -2 \int_0^1 \frac{1+a^2 x^2}{(1-a^2 x^2)^2 \sqrt{1-x^2}} dx
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F''(a) < 0 \quad \forall a \in (-1, 1) \Rightarrow F \text{ je konkávní na } (-1, 1), \text{ rostoucí na } (-1, 0)$$

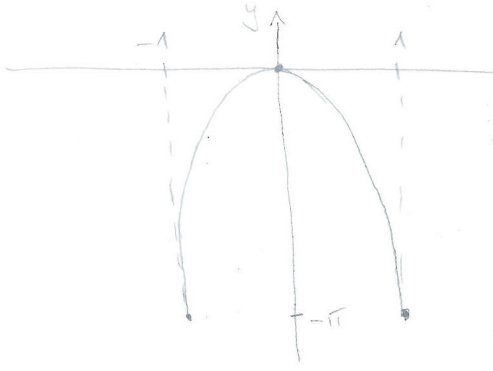
klesající na $(0, 1)$, sudá, v $a=0$ má maximum, nemá inf. body

Pro $a \rightarrow 1_-$ je $F'(a) \rightarrow -\infty$, protože $\int_0^1 \frac{1}{(1-x^2) \sqrt{1-x^2}} dx$ diverguje.

Ještě dopočítáme $F(1) = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \text{per partes.} \\ u = \ln(1-x^2) \quad v' = \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \\ u' = \frac{-2x}{1-x^2} \quad v = ? \end{array} \right|$

$$v = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t \cos t} = \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\cot t = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Zpět k per partes: $F(1) = \underbrace{\left[\ln(1-x^2) \cdot (-1) \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -2 [\arcsin x]_0^1 = -\pi$



v krajních bodech nekonečné jednostranné derivace

Předpoklady: • měřitelnost, spojitost, ex. derivace pro $f(a,x) = \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$ triv.

• $f(0,x) = 0 \in L^1$

• $|f| \leq 2a^2 \cdot 2$ na okolí nuly $\leq 4 \quad \forall a \in (-1,1) \quad \left(\left| \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2} \right| \leq 2a^2, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq 2 \right)$

$|f| \leq 2 \cdot (1-x)^{1/2} \cdot \underbrace{|\ln(1-x^2)|}_{\in L^1}$ na okolí jedničky $\forall a \in (-1,1)$

$\left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \leq \frac{1}{1-a^2x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in L^1 \quad \forall a \in (-a_0, a_0), a_0 < 1$

$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \right| \leq \frac{4}{(1-a^2x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in L^1 \quad \text{--- " ---}$

$\Rightarrow$ Spojitost na $[-1,1]$, derivace na $(-1,1)$.