Sada příkladů 6/9

Křivkový a plošný integrál

Křivkový integrál

1. Parametrizujte epicykloidu, tj. křivku, která vznikne pohybem zvoleného bodu jedné kružnice, kutálející se po jiné pevné kružnici.

2. Napište v parametrickém tvaru rovnici kružnice, která je průnikem koule a roviny.

3. Napište parametrický tvar kuželosečky, tj. průniku kužele a roviny a proveďte diskusi.

4. Parametrizujte křivku, zadanou jako průnik dvou sfér v $\mathbb{R}^3$.

   Spočtěte následující křivkové integrály:

5. $\int_C x^2 \, \mathrm{d}s$, kde C je oblouk AB křivky $y = \ln x$, $A = (2, \ln 2)$, $B = (1, 0)$

6. $\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) \, \mathrm{d}s$, kde C je asteroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

7. $\int_C |y| \, \mathrm{d}s$, kde C je lemniskáta $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

8. $\int_C (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x + (x^2 - y^2) \, \mathrm{d}y$, kde C je obvod trojúhelníka ABC, $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, přičemž (A, B, C) je trojice uspořádaná ve smyslu orientace křivky

9. $\int_C \frac{(x + y) \, \mathrm{d}x - (x - y) \, \mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$, kde C je kružnice $x^2 + y^2 = a^2$, přičemž trojice bodů $A = (a, 0)$, $B = (0, a)$, $C = (-a, 0)$ je uspořádaná ve smyslu orientace křivky

10. $\int_C y \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}y + x \, \mathrm{d}z$, kde C je průsečnice ploch $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ a trojice bodů $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (-1, 0, 0)$ je uspořádaná ve smyslu orientace křivky

11. Ukažte, že $\int_C f(x^2+y^2+z^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)$, kde f je spojitá funkce, je roven nule přes libovolnou uzavřenou křivku C.

Spočtěte následující křivkové integrály:

12. $\int_A^B (x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y$, kde $A=(-2,-1)$, $B=(3,0)$

13. $\int_A^B \left(2xy^2+3x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{y^2}\right)\mathrm{d}x+\left(2x^2y+3y^2+\frac{1}{y^2}-\frac{2x^2}{y^3}\right)\mathrm{d}y$, kde $A=(2,1)$, $B=(1,2)$ a křivka se nachází uvnitř prvního kvadrantu

14. $\int_A^B \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, kde $A=(0,0,a)$, $B=(0,b,0)$ a křivka prochází mimo počátek

15. Vypočtěte hmotnost hmotného oblouku $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $t\in(0,2\pi)$, je-li jeho lineární hustota $\mu(x,y,x)=k(x^2+y^2+z^2)$.

16. Najděte těžiště homogenního oblouku kružnice o poloměru a, $0\leq\varphi\leq 2\alpha$.

17. Spočtěte gravitační sílu, kterou působí homogenní půlkružnice o poloměru R a hmotnosti M na hmotný bod o hmotnosti m ve svém středu.

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

Křivka: $\varphi: I \to \mathbb{R}^N$, I interval. Obvykle chceme $\varphi \in C^1$ nebo alespoň po částech C^1. $\langle\varphi\rangle$ ... obraz křivky, $\langle\varphi\rangle := \varphi(I)$

Regulární křivka: $\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \dots, \varphi_N'(t)) \neq 0$ na I

↳ tečný vektor, $\tau(t) = \dfrac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$ ... jednotkový tečný vektor

Jednoduchá křivka: φ je prostá (pokud $I = [a,b]$, tak je prostá na $[a,b)$ a $(a,b]$) a a φ^{-1} je spojitá na obrazu (a,b).

... není jednoduchá kvůli dotykovému bodu

Uzavřená křivka: $I = [a,b]$ a $\varphi(a) = \varphi(b)$

... je jednoduchá a uzavřená, dotyk na kraji intervalu nevadí.

Jordanova křivka: jednoduchá + uzavřená

Součet křivek: intuitivně, viz přednáška

Opačná křivka: $\ominus\varphi(t) := \varphi(-t)$ pro $t \in -I$ ... stejná křivka, ale probíhaná odzadu

<u>Křivkový integrál 1. druhu</u>: (φ, I) regulární, po částech C^1 křivka, $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definovaná na $\langle\varphi\rangle$.

Pak $\displaystyle\int_\varphi f\,ds := \int_I f(\varphi(t))\,\|\varphi'(t)\|\,dt$, kde $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\varphi_i'(t))^2}$

<u>Křivkový integrál 2. druhu</u>: (φ, I) jako výše. $F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ vektorové pole def. na $\langle\varphi\rangle$.

Pak $\displaystyle\int_\varphi F \cdot d\varphi := \int_I F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$

Často také $F = (F_1, F_2, \dots, F_N)$: $\displaystyle\int_\varphi F \cdot d\varphi = \int_\varphi F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \dots + F_N\,dx_N$

Platí $\displaystyle\int_\varphi F \cdot d\varphi = \int_\varphi (F \cdot \tau)\,ds$

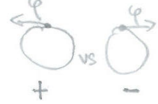
Nezávislost na parametrizaci: Je-li $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$ a f spojitá na $\langle\varphi\rangle$, pak $\displaystyle\int_\varphi f\,ds = \int_\psi f\,ds$

Je-li F spojité na $\langle\varphi\rangle$, pak $\displaystyle\int_\varphi F \cdot d\varphi = \pm \int_\psi F \cdot d\psi$

<u>Věta</u>: Má-li $F \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$ potenciál U na množině Ω a $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$, pak

$$\int_\varphi F \cdot d\varphi = U(\varphi(b)) - U(\varphi(a)), \quad \varphi: [a,b] \to \langle\varphi\rangle$$

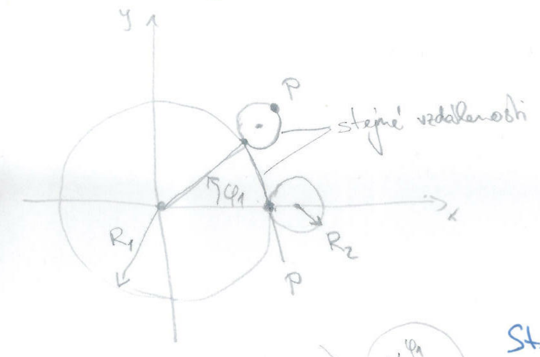
Jordanova křivka je kladně orientovaná, když "vnitřek křivky je nalevo od tečného vektoru":



<u>Greenova věta</u> (v $\mathbb{R}^2$?): φ kladně orientovaná Jordanova křivka (p.č. C^1), Ω vnitřek $\langle\varphi\rangle$. $T \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$

Pak $\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div} T\,dx = \int_\varphi (-T_2, T_1) \cdot d\varphi$ a $\displaystyle\int_\varphi T \cdot d\varphi = \int_\Omega \left(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\right) dx$

1) ~~[illegible]~~ Epicykloida



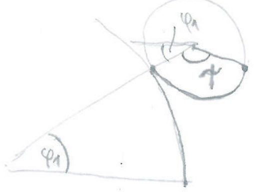
Souřadnice středu malé kružnice

$$x_0 = (R_1+R_2)\cos\varphi_1$$
$$y_0 = (R_1+R_2)\sin\varphi_1$$

Pozice bodu P relativně ke středu malé kružnice:

$$x' = R_2\cos\varphi_2 \qquad y' = R_2\sin\varphi_2$$

kde $\varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \pi$!



Stejné vzdálenosti: $R_1\varphi_1 = R_2\psi \Rightarrow \psi = \frac{R_1}{R_2}\varphi_1$

$$\Rightarrow \varphi_2 = \varphi_1 + \pi + \psi = \pi + \frac{R_1+R_2}{R_2}\varphi_1$$

$$\Rightarrow x = (R_1+R_2)\cos\varphi_1 + R_2\cos\left(\pi + \frac{R_1+R_2}{R_2}\varphi_1\right) = (R_1+R_2)\cos\varphi_1 - R_2\cos\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\varphi_1\right)$$

$$y = (R_1+R_2)\sin\varphi_1 + R_2\sin\left(\pi + \frac{R_1+R_2}{R_2}\varphi_1\right) = (R_1+R_2)\sin\varphi_1 - R_2\sin\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\varphi_1\right)$$

$\varphi_1 \in (0, 2\pi)$

---

2) Průnik koule a roviny: Koule: $x^2+y^2+z^2 = R^2$ ... Ω

Rovina: $ax+by+cz = d$ ... Γ normálový vektor $\vec{n} = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Střed hledané kružnice: takový bod S, jehož souřadnice jsou násobkem normálového vektoru

$\vec{n}\cdot\alpha \in \Gamma$, tj. $a n_1 + b n_2 + c n_3 = \frac{1}{\alpha} d$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{\alpha} d \Rightarrow \alpha = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow \underline{S = \frac{d(a,b,c)}{a^2+b^2+c^2}}$$

V bodě S zavedeme nový souřadný systém, potřebujeme najít vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, které jsou na sebe kolmé, oba jsou kolmé i na $\vec{n}$ (tj. leží v rovině Γ).

Potom body na hledané kružnici budou parametrizovány $\vec{r} = S + \vec{u}\cos t + \vec{v}\sin t$, $t \in (0, 2\pi)$

Potřebujeme tedy, aby $S+\vec{u}$ a $S+\vec{v}$ ležely také na kouli (měli správnou délku)

$|S|^2 = \frac{d^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\cdot(a^2+b^2+c^2) = \frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}$. (Aby byl nenulový průnik, musí být $\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2} < R^2$!)

$\Rightarrow |\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 = R^2 - \frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}$, aby $|S|^2 + |\vec{u}|^2 = R^2$. Máme délku, zbývá směr $\vec{u}, \vec{v}$.

Směr $\vec{n}$: (a,b,c). $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{u}$ můžu zvolit např. $(0,c,-b)$ (to je jen směr)

správná velikost: $\vec{u} = \frac{(0,c,-b)}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}}$

Nyní $\vec{v}$ tak, aby $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$ a $\vec{v}\cdot\vec{u} = 0$: $\vec{v} = (\beta,\gamma,\delta)$. Chci $a\beta + b\gamma + c\delta = 0$

$c\gamma - b\delta = 0$

$\gamma = \frac{b}{c}\delta$

$\beta = -\frac{1}{a}\left(\frac{b^2}{c} + c\right)\delta = -\frac{b^2+c^2}{ac}\delta$

$\Rightarrow$ Směr $\vec{v} = (-(b^2+c^2), ab, ac)$

správná velikost: $\vec{v} = \frac{(-b^2-c^2, ab, ac)}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2)}}\cdot\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}}$

CELKEM: $x = \frac{ad}{a^2+b^2+c^2} + \sin t\cdot\left(\frac{-b^2-c^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2)}}\cdot\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}}\right)$ | $y = \frac{bd}{a^2+b^2+c^2} + \left(\cos t\cdot\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} + \sin t\frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2)}}\right)\cdot\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}}$ |

$$z=\frac{cd}{a^2+b^2+c^2}+\left(\cos t\cdot\frac{(-b)}{\sqrt{b^2+c^2}}+\sin t\cdot\frac{ac}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2)}}\right)\cdot\sqrt{R^2-\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}}$$

3) Kužel: nejlépe v cylindrických souřadnicích jako $z^2=\beta r^2$ pro $\beta>0$.

Rovina: $ax+by+cz=d$, tj. $ar\cos\varphi+br\sin\varphi+cz=d$

Průnik: $ar\cos\varphi+br\sin\varphi\pm c\sqrt{\beta}\,r=d$. Budeme parametrizovat úhlem $\varphi\in(0,2\pi)$

a potom $r=\dfrac{d}{a\cos\varphi+b\sin\varphi\pm c\sqrt{\beta}}$ (pro $d=0$ je to $a\cos\varphi+b\sin\varphi\pm c\sqrt{\beta}=0$!)

Odtud zpět do (x,y,z):

$$x=\frac{d\cos\varphi}{a\cos\varphi+b\sin\varphi\pm c\sqrt{\beta}}\qquad y=\frac{d\sin\varphi}{a\cos\varphi+b\sin\varphi\pm c\sqrt{\beta}}$$

$$z=\frac{\pm\sqrt{\beta}\,d}{a\cos\varphi+b\sin\varphi\pm c\sqrt{\beta}}$$

rovina procházející počátkem ($d=0$) protne kužel buď jen v počátku nebo ve dvou přímkách danými rovnicemi r libovolné a $a\cos\varphi+b\sin\varphi\pm c\sqrt{\beta}=0$, která dá nejvýše dvě řešení.

$a=b=0$... kružnice

elipsa, pokud normálový vektor k rovině je uvnitř kužele. Tj. (a,b,c) musí splňovat

$z^2\geq\beta r^2$

$\Rightarrow$ $c^2>\beta(a^2+b^2)$ ... elipsa

$c^2=\beta(a^2+b^2)$ ... parabola

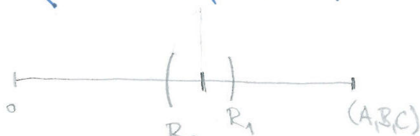
$c^2<\beta(a^2+b^2)$ ... hyperbola

4) 1. sféra: $x^2+y^2+z^2=R_1^2$ (BÚNO střed v počátku, jinak jen posuneme)

2. sféra: $(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2=R_2^2$.

Aby byl neprázdný průnik: $\sqrt{A^2+B^2+C^2}\in(|R_1-R_2|,R_1+R_2)$

Střed vzniklé kružnice: $\alpha\cdot(A,B,C)$



Odečtením obou rovnic: $2Ax+2By+2Cz=R_1^2-R_2^2+A^2+B^2+C^2$ ... rovnice roviny, ve které leží střed

$$2\alpha(A^2+B^2+C^2)=R_1^2-R_2^2+A^2+B^2+C^2$$

$$\alpha=\frac{R_1^2-R_2^2}{2(A^2+B^2+C^2)}+\frac{1}{2}$$

Podobně jako v příkladu 2) zbývá najít 2 vektory $\vec{u},\vec{v}$ kolmé na (A,B,C) se správnou délkou. Stejně jako tam lze volit směry $(0,C,-B)$ a $(-B^2-C^2,AB,AC)$. Délka vektorů je poloměr vzniklé kružnice. Ten je $\sqrt{R_1^2-\frac{(R_1^2-R_2^2)^2}{4(A^2+B^2+C^2)}-\frac{(R_1^2-R_2^2)}{2}-\frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2)}=:\rho$ (tj. $\sqrt{R_1^2-\alpha^2(A^2+B^2+C^2)}$)

Pak $x=\alpha A+\cancel{\cos t}\ \rho\cdot\sin t\cdot\dfrac{(-B^2-C^2)}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(B^2+C^2)}}$ $\quad y=\alpha B+\rho\cdot\left(\cos t\dfrac{C}{\sqrt{B^2+C^2}}+\sin t\dfrac{AB}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(B^2+C^2)}}\right)$

$$z=\alpha C+\rho\cdot\left(\cos t\cdot\frac{(-B)}{\sqrt{B^2+C^2}}+\sin t\frac{AC}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(B^2+C^2)}}\right)$$

5) $y = \ln x$ $\qquad A = (2, \ln 2)$, $\quad B = (1, 0)$

$\int_\varphi x^2 \, ds$ ... integrál 1. druhu, nezávisí na směru.

Lze parametrizovat přímo x-ovou souřadnicí: $\varphi: (1,2) \longmapsto \mathbb{R}^2$

$\varphi(x) = (x, \ln x)$

$\varphi'(x) = (1, \frac{1}{x})$

$$\Rightarrow \int_\varphi x^2 \, ds = \int_1^2 x^2 \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\, dx = \int_1^2 x\sqrt{1+x^2}\, dx \,\Big|\, s = x^2+1$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{s}\, ds = \frac{1}{3}\left[s^{3/2}\right]_2^5 = \underline{\underline{\frac{1}{3}\left(5^{3/2} - 2^{3/2}\right)}}$$

6) DÚ

7) $\int_C |y| \, ds$ $\qquad C: (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

Pol. souřadnice: $r^4 = a^2 r^2 \cos 2\varphi \Rightarrow r^2 = a^2 \cos 2\varphi \Rightarrow$ potřebujeme $\cos 2\varphi > 0$

BÚNO $a > 0$ $\qquad 2\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$

$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ $\qquad \Rightarrow \varphi \in \left(-\pi/4, \pi/4\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right)$

$x = r\cos\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$

$$\Rightarrow \int_C |y|\, ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r \cdot |\sin\varphi| \cdot \|C'\|\, d\varphi + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{5/4\pi} r|\sin\varphi| \cdot \|C'\|\, d\varphi$$

$$C' = a \cdot \left(\frac{-\sin 2\varphi \cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} - \sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi, \; \frac{-\sin 2\varphi \sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} + \sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$\|C'\| = a\left[\frac{1}{\cos 2\varphi}\cdot\left(\sin^2 3\varphi + \cos^2 3\varphi\right)\right]^{1/2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

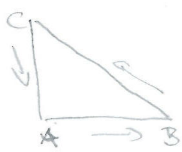
$$\Rightarrow \int_C |y|\, ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot |\sin\varphi| \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{5/4\pi} -''- = 4a^2 \int_0^{\pi/4} \sin\varphi\, d\varphi = \underline{\underline{4a^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$$

8) $\int_C (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$ $\qquad \triangle ABC \quad A = (0,0), \; B = (1,0), \; C = (0,1)$

$\varphi_1 = |AB|: \; (t, 0), \; t \in (0,1)$ $\quad \big| \; \varphi_1': (1, 0)$

$\varphi_2 = |BC|: \; (1-t, t), \; t \in (0,1)$ $\quad \big| \; \varphi_2': (-1, 1)$

$\varphi_3 = |CA|: \; (0, 1-t), \; t \in (0,1)$ $\quad \big| \; \varphi_3': (0, -1)$



$\|$

$$\int_0^1 t^2 \cdot 1 + t^2 \cdot 0 \, dt +$$

$$+ \int_0^1 \left((1-t)^2 + t^2\right)\cdot(-1) + \left((1-t)^2 - t^2\right)\cdot 1 \, dt +$$

$$+ \int_0^1 (1-t)^2 \cdot 0 + -(1-t)^2 \cdot (-1)\, dt = \int_0^1 -t^2 + (1-t)^2\, dt = \int_0^1 1 - 2t\, dt = 1 - \left[t^2\right]_0^1 = \underline{\underline{0}}$$

Lze i Greenovou větou: $I = \int_\Delta 2x - 2y \, dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} 2x - 2y \, dx\, dy = \int_0^1 \left[x^2 - 2xy\right]_{x=0}^{x=1-y} dy =$

$$= \int_0^1 (1-y)^2 - 2y(1-y)\, dy = \int_0^1 3y^2 - 4y + 1\, dy = \left[y^3 - 2y^2 + y\right]_0^1 = \underline{\underline{0}}$$

Ale pozor, vektorové pole nemá potenciál!!

9) $\int\limits_C \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dy$ $\qquad C: x^2+y^2=a^2$

Parametrizace: $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ $\quad \varphi \in (0, 2\pi)$

$c': (-a\sin\varphi, a\cos\varphi)$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{a}\cdot(-a\sin\varphi) - \frac{\cos\varphi-\sin\varphi}{a}\cdot a\cos\varphi \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2\varphi - \cos^2\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} -1 \, d\varphi = \underline{\underline{-2\pi}}$$

---

10) $\int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ $\qquad C: z = xy \quad x^2+y^2=1$

Válcové souřadnice: $r = 1$ a $z = \cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$

Uspořádání bodů: $\varphi \in (0, 2\pi)$ OK

Máme tedy $\left.\begin{aligned} x &= \cos\varphi \\ y &= \sin\varphi \\ z &= \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi \end{aligned}\right\}$ $c' \doteq \begin{cases} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ \cos 2\varphi \end{cases}$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\cos 2\varphi \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos^2\varphi + \cos\varphi - 2\cos\varphi\sin^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{2}\right)d\varphi + \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} + \left[\sin\varphi\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{2\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} - \pi = \underline{\underline{-\pi}}$$

---

11) $\int\limits_C f(x^2+y^2+z^2)\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$

f spojitá $\Rightarrow$ ex. primitivní fce F t.ž. $F' = f$

$\nabla F(x^2+y^2+z^2) = \left(f(x^2+y^2+z^2)\cdot 2x,\ f(\ )\cdot 2y,\ f(\ )\cdot 2z\right)$

$\Rightarrow \ = \frac{1}{2}\int\limits_C \nabla F \cdot d\varphi = 0$, protože $\frac{1}{2}F(x^2+y^2+z^2)$ je potenciál daného vektorového pole!

---

12) $I = \int_A^B \underbrace{(x^4+4xy^3)}_{M}\,dx + \underbrace{(6x^2y^2-5y^4)}_{N}\,dy$ $\qquad A = (-2,-1) \quad B = (3,0)$. Nemáme křivku $\Rightarrow$ hledáme potenciál

Ověření existence potenciálu: $\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$ OK

$U = \int M\,dx = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + C(y)$ $\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y^2 + C'(y) = 6x^2y^2 - 5y^4 \Rightarrow C'(y) = -5y^4$

$C(y) = -y^5$

Mohli bychom přidat konstantu, ale ta se stejně odečte $\qquad U = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5$

$$I = U(B) - U(A) = \frac{243}{5} + \frac{32}{5} + 8 - 1 = \underline{\underline{62}}$$

---

13) $\int_A^B \underbrace{\left(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^2}\right)}_{M}dx + \underbrace{\left(2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}\right)}_{N}dy$ $\qquad A = (2,1) \quad B = (1,2)$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - \frac{4x}{y^3} = \frac{\partial N}{\partial x}$ OK

$U = \int M\,dx = x^2y^2 + x^3 - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{y^2} + C(y)$ $\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 2x^2y - \frac{2x^2}{y^3} + C'(y) = 2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3} \Rightarrow C'(y) = 3y^2 + \frac{1}{y^2}$

$C(y) = y^3 - \frac{1}{y}$

$\Rightarrow U = x^2y^2 + x^3 - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{y^2} + y^3 - \frac{1}{y}$

$$I = U(B) - U(A) = 4 + 1 - 1 + \frac{1}{4} + 8 - \frac{1}{2} - \left(4 + 8 - \frac{1}{2} + 4 + 1 - 1\right) = \frac{1}{4} - 4 = \underline{\underline{-\frac{15}{4}}}$$

(14) $\displaystyle\int_A^B \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\qquad A=(0,0,a)$, $B=(0,b,0)$

Potenciál existuje, viz příklad 11,

$f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow F(t)=2\sqrt{t} \Rightarrow \frac{1}{2}F(x^2+y^2+z^2)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

je potenciál

$$\Rightarrow \underline{I=|b|-|a|}$$

---

(15) $m=\int_\varphi \mu\,ds$ $\qquad \mu=k(x^2+y^2+z^2)$ $\qquad x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt \Rightarrow \varphi'=\begin{cases}-a\sin t\\ a\cos t\\ b\end{cases}$ $\quad \|\varphi'\|=\sqrt{a^2+b^2}$

$$=\int_0^{2\pi} k\cdot(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\underline{k\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(2\pi a^2+\frac{1}{3}b^2\cdot(2\pi)^3\right)}$$

---

(16) $C:\ x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi \Rightarrow C'=\begin{cases}-a\sin\varphi\\ a\cos\varphi\end{cases}$ $\quad \|C'\|=a$ $\quad \varphi\in(0,2\alpha)$ $\quad T=\left[\frac{M_x}{M},\frac{M_y}{M}\right]$ $\quad M=\int_C \rho\,ds$, $M_x=\int_C x\,ds$, $M_y=\int_C y\,ds$

Homogenní $\Rightarrow \rho=1$ BÚNO. $\quad M=\int_0^{2\alpha} a\,d\varphi=2a\alpha$

$$M_x=\int_0^{2\alpha} a^2\cos\varphi\,d\varphi=a^2\sin 2\alpha$$

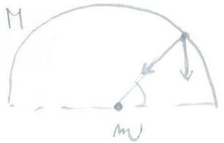
$$M_y=\int_0^{2\alpha} a^2\sin\varphi\,d\varphi=-a^2(\cos 2\alpha-1)$$

$$\Rightarrow \underline{T=\left[\frac{a\sin 2\alpha}{2\alpha},\ \frac{-a(\cos 2\alpha-1)}{2\alpha}\right]}$$

---

(17) $C:\ x=R\cos\varphi,\ y=R\sin\varphi \Rightarrow C'=\begin{cases}-R\sin\varphi\\ R\cos\varphi\end{cases},\ \|C'\|=R$ $\quad \varphi\in(0,\pi)$ $\quad$ homogenní $\Rightarrow \rho=\text{const}$

$$M=\int_C \rho\,ds=\rho R\int_0^\pi 1\,d\varphi=\rho R\pi \Rightarrow \rho=\frac{M}{R\pi}$$



$$\vec{F_g}=Gm\int_C \frac{\rho(x,y)}{R^2}\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|}\,ds=\frac{GmM}{R^3\pi}\int_0^\pi (R\cos\varphi,R\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{GmM}{R^2\pi}\cdot\left([\sin\varphi]_0^\pi,\ [-\cos\varphi]_0^\pi\right)=$$

$$=\underline{\left(0,\ \frac{2GmM}{R^2\pi}\right)}$$