Křivkový a plošný integrál

Plošný integrál 1. druhu

1. Parametrizujte torus.

2. Parametrizujte Möbiův list.

3. Popište povrch kvádru jako zobecněnou plochu.

4. Napište parametricky rovnici zobecněné koule

$$|x|^\alpha + |y|^\alpha + |z|^\alpha = a^\alpha,$$

   α i $a > 0$.

5. Popište plášť válce

$$\{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq r^2; |z| \leq a\}$$

   jako zobecněnou plochu.

6. Najděte plošný obsah plochy $z^2 = 2xy$ uříznuté rovinami $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

7. Najděte plošný obsah plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, omezené vnitřkem válce $x^2 + y^2 = 2x$.

8. Najděte plošný obsah plochy $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $z = h\varphi$, $0 < \varrho < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.

9. Najděte plošný obsah anuloidu $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$.

10. Najděte plošný obsah plochy $x^2 + y^2 = 1$ omezené $y^2 + z^2 \leq 1$.

11. Najděte plošný obsah plochy $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1$, $z \geq 0$.

12. Spočtěte $\int_S \frac{\mathrm{d}S}{h}$, kde S je povrch elipsoidu a h je vzdálenost od středu elipsoidu k rovině "tečné k $\mathrm{d}S$".

13. Spočtěte $\int_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}S$, kde S část hyperbolického paraboloidu $z = xy$, odříznutá válcovou plochou $x^2 + y^2 = R^2$ ($|z| \leq R$).

14. Najděte momenty setrvačnosti homogenní trojúhelníkové desky desky $x + y + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, vůči jednotlivým souřadnicovým osám.

15. Spočtěte gravitační sílu, kterou se přitahují dvě homogenní sféry o poloměrech R a r, ležící ve vzdálenosti d. Plošná hustota rozložení hmoty je ϱ.

16. Najděte těžiště homogenního kužele $\sqrt{x^2 + y^2} = z$, useknutého válcem $x^2 + y^2 = ax$.

17. Najděte těžiště homogenní části koule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x, y, z \geq 0$.

18. Najděte těžiště homogenního helikoidu $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = hv$, $0 < u < a$, $0 < v < \pi$.

19. Najděte gravitační potenciál homogenní kulové plochy $x^2+y^2+z^2 = a^2$ v bodě $P = (x_0, y_0, z_0)$, tj. spočtěte $\int_S \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\,\mathrm{d}S$.

20. Najděte sílu, kterou působí kapalina s hustotou γ na svislou stěnu nádoby tvaru parabolického úseku $\frac{h}{a^2}(y^2 - a^2) \leq z \leq 0$, $x = 0$.

PLOŠNÝ INTEGRÁL

Definice: $k, N \in \mathbb{N}$, $k < N$. $M \subset \mathbb{R}^N$ je k-plocha (k … dimenze plochy), jestli existuje neprázdná otevřená množina $E \subset \mathbb{R}^k$ a zobrazení $\varphi: E \to \mathbb{R}^N$ t.ž. $\varphi(E) = M$, $\varphi \in C^1(E; \mathbb{R}^N)$ a hodnost Jacobiho matice φ je rovna k všude v E.

Definice: Gramova matice: $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \mathbb{G}(v_1, \dots, v_k) := \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \dots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \dots & v_2 \cdot v_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & v_k \cdot v_2 & \dots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix}$

Použití: $\varphi \in C^1(E; \mathbb{R}^N) \Rightarrow D\varphi$ … Jacobiho matice $= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_N}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_N}{\partial t_k} \end{pmatrix}$

$D\varphi$ má N řádků, k sloupců

$\mathbb{G}(D\varphi)$ … Gramova matice aplikovaná na vektory dané sloupci $D\varphi$, tj. na k vektorů, kde každý má N složek. Proto $\mathbb{G}(D\varphi)$ je matice $k \times k$

Plošný integrál 1. druhu: $\int_M f \, dS := \int_E f(\varphi(t)) \sqrt{\det \mathbb{G}(D\varphi(t))} \, dt$

Speciálně $\int_M 1 \, dS =: S_k(M)$ je k-rozměrný plošný obsah k-plochy M.

Je-li plocha daná grafem fce, tj. $\varphi(x,y) = (x, y, z(x,y))$, pak $\det \mathbb{G}(D\varphi) = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$

Zobecněná k-plocha: sjednocení konečného množství ploch dimenze nejvýše k.

Příklad: sféra není 2-plocha, ale zobecněná 2-plocha složená ze
- sféry bez poledníku (2-pl.)
- poledníku bez pólů (1-pl.)
- obou pólů (2× 0-pl)

Integrál přes zobecněnou k-plochu = součet integrálů jen přes kusy dimenze k.

---

1) torus:

Velká kružnice v rovině $z=0$: $\begin{array}{l} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \end{array}$. Každý takový bod je středem kružnice o menším poloměru $b<a$ ležícím v rovině $\sin\varphi \, x - \cos\varphi \, y = 0$. V této rovině jsou na sebe kolmé vektory $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ a $(0,0,1) \Rightarrow$ body na toru tak jsou

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi + b\cos\varphi\cos\psi \\ y &= a\sin\varphi + b\sin\varphi\cos\psi \\ z &= b\sin\psi \end{aligned}$$

$\varphi \in (0, 2\pi)$, $\psi \in (0, 2\pi)$. To ale není celý torus! Chybí kružnice odpovídající $\varphi = 0$ a $\psi = 0$.

$\Rightarrow$ Zobecněná plocha a přidáme ještě $\left.\begin{array}{l} x = a + b\cos\psi \\ y = 0 \\ z = b\sin\psi \end{array}\right\} \psi \in (0, 2\pi)$

A dále $\left.\begin{array}{l} x = (a+b)\cos\varphi \\ y = (a+b)\sin\varphi \\ z = 0 \end{array}\right\} \varphi \in (0, 2\pi)$ a nakonec ještě bod $(a+b, 0, 0)$

2) Möbiův list

Začneme úsečkou $x = 10$ ... např., lze zvolit lib. R
$y = 0$
$z = t,\ t \in [-1,1]$ ... např., lze zvolit lib. $[-r,r]$, $r < R$.

Tu nechámě rotovat kolem osy z, ale aby nevznikl válec, ještě ji navíc otočíme během této rotace o $180°$.

Úhel rotace: $\varphi \in (0, 2\pi)$, úsečka se má otočit jen o π, tedy průběžně se bude otáčet o $\frac{\varphi}{2}$. Očividně tak $z = t \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$, $t \in (-1,1)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$

Střed úsečky bude vždy v bodě
$$x = R\cos\varphi,\quad y = R\sin\varphi,\quad z = 0$$
, v rovině (r,z) pak je
$$z = t\cos\frac{\varphi}{2},\quad r = R + t\sin\frac{\varphi}{2}$$

$\Rightarrow$ Výsledek
$$\left.\begin{aligned} x &= \left(R + t\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi \\ y &= \left(R + t\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi \\ z &= t\cos\frac{\varphi}{2} \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&\varphi \in (0, 2\pi)\\ &t \in (-1,1).\end{aligned}$$
Nalepíme přidáním úsečky $x = R$, $y = 0$, $z = t$.

---

3) kvádr $=$ $6\times$ 2-plocha, $12\times$ 1-plocha, $8\times$ 0-plocha $\Rightarrow$ Sjednocení 2-ploch

$x \in (0,a)$	$x \in (0,a)$	$x \in (0,a)$	$x \in (0,a)$	$x = 0$	$x = a$
$y \in (0,b)$	$y \in (0,b)$	$y = 0$	$y = b$	$y \in (0,b)$	$y \in (0,b)$
$z = 0$	$z = c$	$z \in (0,c)$	$z \in (0,c)$	$z \in (0,c)$	$z \in (0,c)$

a dále 1-ploch

$x = 0$	$x = a$	$x = 0$	$x = a$
$y = 0$	$y = 0$	$y = b$	$y = b$
$z \in (0,c)$	$z \in (0,c)$	$z \in (0,c)$	$z \in (0,c)$

... atd

a dále 0-ploch (= bodů) $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(a,b,0)$, $(0,0,c)$, $(a,0,c)$, $(0,b,c)$, (a,b,c)

---

4) Nabízí se
$$x = a\cos^{2/\alpha}\varphi\,\sin^{2/\alpha}\theta$$
$$y = a\sin^{2/\alpha}\varphi\,\sin^{2/\alpha}\theta$$
$$z = a\cos^{2/\alpha}\theta$$
Ale je problém, že obecná mocnina je definována jen pro nezáporný základ. $\Rightarrow$ Je potřeba udělat v každém oktantu zvlášť. Označme

$$X = a|\cos\varphi|^{2/\alpha}\cdot|\sin\theta|^{2/\alpha} = X(\varphi,\theta)$$
$$Y = Y(\varphi,\theta) = a|\sin\varphi|^{2/\alpha}\cdot|\sin\theta|^{2/\alpha}$$
$$Z = Z(\theta) = a|\cos\theta|^{2/\alpha}$$

A postupně:

$x = X(\varphi,\theta)$, $y = Y(\varphi,\theta)$, $z = Z(\theta)$; $\varphi \in (0,\frac{\pi}{2})$, $\theta \in (0,\frac{\pi}{2})$	$x = -X(\varphi,\theta)$, $y = Y(\varphi,\theta)$, $z = Z(\theta)$; $\varphi \in (\frac{\pi}{2},\pi)$, $\theta \in (0,\frac{\pi}{2})$
$x = -X(\varphi,\theta)$, $y = -Y(\varphi,\theta)$, $z = Z(\theta)$; $\varphi \in (\pi,\frac{3}{2}\pi)$, $\theta \in (0,\frac{\pi}{2})$	$x = X(\varphi,\theta)$, $y = -Y(\varphi,\theta)$, $z = Z(\theta)$; $\varphi \in (\frac{3}{2}\pi,2\pi)$, $\theta \in (0,\frac{\pi}{2})$

a podobně pro $z < 0$, tj. $\theta \in (\frac{\pi}{2},\pi)$.

K tomu je potřeba přidat mnoho oblouků kružnic odpovídající $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ (celkem 8)

4 oblouky na rovníku $(\theta = \frac{\pi}{2})$ a nakonec body na osách (6 bodů celkem)

5) Hlavní část pláště: $x = r\cos\varphi$, $\varphi \in (0, 2\pi)$
$y = r\sin\varphi$, $t \in (-a, a)$
$z = t$ 2-plocha

Dále musíme přidat chybějící úsečku $x = r,\ y = 0,\ z = t,\ t \in (-a,a)$
Horní a dolní kružnici: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = \pm a,\ \varphi \in (0, 2\pi)$ } 1-plochy
a nakonec chybějící body: $x = r,\ y = 0,\ z = \pm a$. – 0-plochy

6) $z^2 = 2xy$ oříznuté rovinami $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$

... má dvě části! $z = +\sqrt{2xy}$ a $z = -\sqrt{2xy}$

Plošný obsah obou částí je očividně stejný, stačí počítat jednu z nich

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2y}{x}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x}{y}}$$

$$S_2(M) = \int_M 1\, dS = 2\int_E \sqrt{\det G(\varphi)} = 2\int_E \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}}\, dx\,dy$$

$$= \sqrt{2}\int_E \sqrt{\frac{(x+y)^2}{xy}}\, dx\,dy = \sqrt{2}\int_E \frac{x+y}{\sqrt{xy}}\, dx\,dy = \sqrt{2}\int_E \sqrt{\frac{x}{y}}\, dx\,dy + \sqrt{2}\int_E \sqrt{\frac{y}{x}}\, dx\,dy$$

Množina E je symetrická vzhledem k záměně $x \leftrightarrow y \Rightarrow$ oba integrály jsou stejné!

$$S_2(M) = 2\sqrt{2}\int_E \sqrt{\frac{x}{y}}\, dx\,dy = 2\sqrt{2}\int_0^1 \int_0^{1-y} \sqrt{\frac{x}{y}}\, dx\,dy = 2\sqrt{2}\int_0^1 \cdot \frac{2}{3} y^{-1/2} \cdot \left[x^{3/2}\right]_0^{1-y} dy =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1 \sqrt{\frac{(1-y)^3}{y}}\, dy \ \left|\begin{array}{l} y = u^2 \\ dy = 2u\,du \end{array}\right| = \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1 \frac{\sqrt{(1-u^2)^3}}{u}\, 2u\,du = \frac{8\sqrt{2}}{3}\int_0^1 \sqrt{(1-u^2)^3}\, du \ \left|\begin{array}{l} u = \sin t \\ du = \cos t\, dt \end{array}\right.$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4 t\, dt = \frac{8\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{8}\cos 4t + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{8}\, dt = \frac{8\sqrt{2}}{3}\left[\frac{\sin 4t}{32} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{3}{8}t\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}}$$

7) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ omezená válcem $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$r^2 = 2r\cos\varphi$
$r = 2\cos\varphi,\ \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$S_2(M) = \int_E \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\, dx\,dy = \sqrt{2}\int_E 1\, dx\,dy = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\varphi} r\,dr\,d\varphi = 2\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= 2\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{1}{2}\, d\varphi = 2\sqrt{2}\left[\frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \underline{\underline{\sqrt{2}\pi}}$$

8) $x = r\cos\varphi \qquad r \in (0,a)$

$p: \; y = r\sin\varphi \qquad \varphi \in (0,2\pi) \qquad E = (0,a)\times(0,2\pi)$

$z = h\varphi \qquad$ ... vypadá jako šroub.

p: zobrazení odpovídající ploše, tj. $p: E \to \mathbb{R}^3$

$$D_p = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \\ 0 & h \end{pmatrix} \\ \uparrow \vec{v}_1 \qquad \uparrow \vec{v}_2 \end{array}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2+h^2 \end{pmatrix} \qquad \det G = r^2+h^2$$

$$S_2(M) = \int_E \sqrt{r^2+h^2}\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^a \sqrt{r^2+h^2}\,dr = 2\pi h\int_0^a \sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\,dr = \left| \begin{matrix} t = \frac{r}{h} \\ dt = \frac{dr}{h} \end{matrix} \right| = 2\pi h^2 \int_0^{\frac{a}{h}} \sqrt{1+t^2}\,dt$$

To bohužel není žádný standardní integrál. $t = \operatorname{tg} w$, $dt = \frac{1}{\cos^2 w}\,dw$ $\quad = 2\pi h^2 \int_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{h}} \frac{1}{\cos^3 w}\,dw = \left| \begin{matrix} v = \sin w \\ dv = \cos w\,dw \end{matrix} \right|$

$V := \sin\operatorname{arctg}\frac{a}{h}$

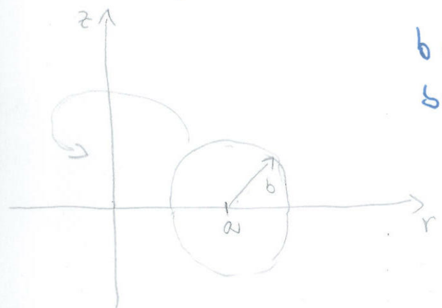
$$= 2\pi h^2 \int_0^V \frac{1}{(1-v^2)^2}\,dv = 2\pi h^2 \int_0^V \frac{1}{4}\cdot\left[-\frac{1}{v-1} + \frac{1}{(v-1)^2} + \frac{1}{v+1} + \frac{1}{(v+1)^2}\right] dv = \frac{\pi h^2}{2}\cdot\left[\ln\frac{v+1}{|v-1|} - \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right]_0^V$$

Platí: $\sin\operatorname{arctg} x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \implies S_2(M) = \frac{\pi h^2}{2}\cdot\left[\underbrace{\ln\frac{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+1}+\frac{a}{h}}{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+1}-\frac{a}{h}}}_{=2\operatorname{argsinh}\frac{a}{h}} + 2\frac{a}{h}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+1}\right] = \pi h^2 \cdot \operatorname{argsinh}\frac{a}{h} + a\pi\sqrt{a^2+h^2}$

---

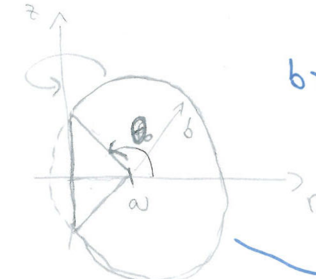
9) $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2 + z^2 = b^2$. Ve válcových souřadnicích $(r-a)^2+z^2 = b^2$ BÚNO $b \geq 0$!

$b=0$ jen bod.



$b<a$ ... torus

$b=a$ ... degenerovaný torus



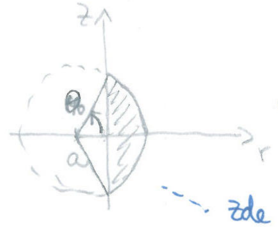
$b>a>0$ ... kus se usekne kvůli požadavku $r>0$!

speciálně $a=0$ ... koule!!

$\cos(\pi-\theta_0) = \frac{a}{b}$

$\parallel$

$-\cos\theta_0 \quad \theta_0 = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$



Pro $a<0$ ... rugbyový míč

... zde rovněž $\theta_0 = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$

Ve všech případech je plocha $z>0$ a $z<0$ stejná $\implies$ lze brát úhly vždy jen v $(0,\theta_0)$

Tj. $z = b\sin\theta$ pro $\theta \in (0,\theta_0)$, kde $\theta_0 = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$ pokud $-\frac{a}{b} \in (-1,1)$. Pro $b<a$ je $\theta_0 = \pi$

Pro $a<0$ a $b<-a$ nemáme nic

x, y viz 1) a parametrizace torus

$x = a\cos\varphi + b\cos\varphi\cos\theta \qquad \varphi \in (0,2\pi)$

$y = a\sin\varphi + b\sin\varphi\cos\theta$

$$D_p = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -a\sin\varphi - b\sin\varphi\cos\theta & -b\cos\varphi\sin\theta \\ a\cos\varphi + b\cos\varphi\cos\theta & -b\sin\varphi\sin\theta \\ 0 & b\cos\theta \end{pmatrix} \\ \uparrow \vec{v}_1 \qquad\qquad \uparrow \vec{v}_2 \end{array}$$

$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 = a^2 + b^2\cos^2\theta + 2ab\cos\theta = (a+b\cos\theta)^2$

$\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 = b^2$

$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$

$$\implies \det G = (a+b\cos\theta)^2 \cdot b^2$$

Pozorování: pro $\theta \in (0,\theta_0)$ je $a+b\cos\theta > 0 \implies \sqrt{\det G} = b\cdot(a+b\cos\theta)$

$$S_2(M) = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_0} ab + b^2\cos\theta \, d\theta\, d\varphi = 4\pi ab\theta_0 + 4\pi b^2 \sin\theta_0$$ (5)

$$= \underline{4\pi ab \arccos\left(-\frac{a}{b}\right) + 4\pi b^2\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}} \quad \text{pro } \frac{a}{b}\in(-1,1)$$

$$= \underline{4\pi^2 ab} \quad \text{pro } 0<b<a \quad (\text{torus})$$

10) DÚ

11) $(x^2+y^2)^{3/2} + z = 1$, $z \geq 0$

Ve válcových: $r^3 + z = 1$, tj. $z = 1 - r^3$, tj. očividně $r \leq 1$, aby $z \geq 0$

$$p: \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = 1 - r^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l}\varphi\in(0,2\pi)\\ r\in(0,1)\end{array} \qquad D_p = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \\ -3r^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} v_1\cdot v_1 = 1+9r^4 \\ v_2\cdot v_2 = r^2 \\ v_1\cdot v_2 = 0\end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\det G} = r\sqrt{1+9r^4}$$

$$S_2(M) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1+9r^4}\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^1 r\sqrt{1+9r^4}\,dr = \left| \begin{array}{l} t = 3r^2 \\ dt = 6r\,dr \end{array}\right| = \frac{\pi}{3}\int_0^3 \sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$= (\text{viz } 8)) = \underline{\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\operatorname{argsinh} 3 + 3\sqrt{10}\right)}$$

12) $\displaystyle\int_S \frac{dS}{h}$ $\quad S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a,b,c>0 \quad$ (implicitně $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 = 0$)

$h(x,y,z) =$ vzdálenost počátku od roviny tečné k dS

Tečná rovina: $\alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y}+\gamma\tilde{z}+\delta = 0$, kde $(\alpha,\beta,\gamma) = k\cdot\nabla F = k\cdot\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$

δ dopočítáme z bodu dotyku: $\frac{2x}{a^2}\cdot x + \frac{2y}{b^2}\cdot y + \frac{2z}{c^2}\cdot z + \delta = 0$

$$2\cdot\underbrace{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}_{\text{na elipsoidu, tj. } = 1} + \delta = 0 \qquad \Rightarrow \delta = -2$$

$\Rightarrow$ hledaná rovina je $\frac{x}{a^2}\cdot\tilde{x}+\frac{y}{b^2}\cdot\tilde{y}+\frac{z}{c^2}\cdot\tilde{z} - 1 = 0$ $\quad (x,y,z)$ bod na elipsoidu, $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\in\mathbb{R}$

Vzdálenost bodu (A,B,C) od roviny $\alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y}+\gamma\tilde{z}+\delta = 0$ je daná vztahem $\dfrac{|\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}{1}$$

$$\Rightarrow \int_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,dS \qquad p: \begin{array}{l} x = a\cos\varphi\sin\psi \\ y = b\sin\varphi\sin\psi \\ z = c\cos\psi\end{array} \qquad \begin{array}{l}\varphi\in(0,2\pi)\\ \psi\in(0,\pi)\end{array}$$

$$D_p = \begin{pmatrix} -a\sin\varphi\sin\psi & a\cos\varphi\cos\psi \\ b\cos\varphi\sin\psi & b\sin\varphi\cos\psi \\ 0 & -c\sin\psi \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1\cdot v_1 = \sin^2\psi\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) \\ v_2\cdot v_2 = \cos^2\psi\,(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) + c^2\sin^2\psi \\ v_1\cdot v_2 = (b^2-a^2)\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi \end{array}\right\}$$

$$\det G = \sin^2\psi\cos^2\psi\cdot\left[a^2b^2(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi) + (a^4+b^4)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right]$$
$$+ c^2\sin^4\psi\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) - (b^2-a^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin^2\psi\cos^2\psi$$
$$= a^2b^2\cdot\sin^2\psi\cos^2\psi\cdot\underbrace{\left[\sin^4\varphi+\cos^4\varphi+2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right]}_{=1} + c^2\sin^4\psi\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)$$

$$\Rightarrow \det G = a^2b^2\sin^2\psi\cos^2\psi + c^2\sin^4\psi\left(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi\right)$$

$$\Rightarrow \int_S \frac{dS}{w} = (\text{symetrie}) = 8\cdot\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi\sin^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{b^2}+\frac{\cos^2\psi}{c^2}}\cdot\sqrt{a^2b^2\sin^2\psi\cos^2\psi + c^2\sin^4\psi\left(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi\right)}\,d\varphi\, d\psi$$

$$= 8abc\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi\sin^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{b^2}+\frac{\cos^2\psi}{c^2}}\cdot\sqrt{\frac{\sin^2\psi\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{b^2}+\frac{\cos^2\psi}{c^2}}\cdot\sin\psi\, d\varphi\, d\psi$$

$$= 8abc\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\cos^2\varphi\sin^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{b^2}+\frac{\cos^2\psi}{c^2}\right)\sin\psi\, d\varphi\, d\psi$$

$$\left|\; \int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\, d\varphi = \pi/4\right.$$

$$= 8abc\cdot\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{4}\frac{\sin^2\psi}{a^2}+\frac{\pi}{4}\frac{\sin^2\psi}{b^2}+\frac{\pi}{2}\frac{\cos^2\psi}{c^2}\right)\sin\psi\, d\psi$$

$$= 2\pi abc\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2\psi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\cos^2\psi\cdot\frac{2}{c^2}\right)\sin\psi\, d\psi =$$

$$\left|\; \int_0^{\pi/2}\sin^3\psi = \left[\frac{\cos^3\psi}{3}-\cos\psi\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\right.$$

$$\left|\; \int_0^{\pi/2}\cos^2\psi\sin\psi\, d\psi = \left[-\frac{\cos^3\psi}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\right.$$

$$= \underline{\underline{\frac{4\pi abc}{3}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}}$$

---

13) $z = xy = r^2\sin\varphi\cos\varphi$ pro $\varphi\in(0,2\pi)$, $r\in(0,R)$ Nejprve ale přepsat podle definice

$p(x,y) = (x,y,xy) \Rightarrow \det G(Dp) = 1+x^2+y^2$

$$\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS = \int_O \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{1}{r}\cdot\sqrt{1+r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^R\sqrt{1+r^2}\,dr$$

$$= (\text{viz } 8,) = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\operatorname{argsinh} R + R\sqrt{R^2+1}\right) = \underline{\pi\cdot\left(\operatorname{argsinh} R + R\sqrt{R^2+1}\right)}$$

---

14) $x+y+z=1$, $x,y,z\geq 0$. Situace je očividně symetrická $\Rightarrow I_x = I_y = I_z$. BÚNO $\rho = 1$ (hustota)

$I_x = \int_M y^2+z^2\,dS$

$\parallel$

$I_z = \int_M x^2+y^2\,dS$

$p:(x,y)\longmapsto(x,y,1-x-y)$, $(x,y)\in E = \{x+y\leq 1,\ x,y>0\}$

$\det G(Dp) = 3$

$$\Rightarrow I_z = \int_E (x^2+y^2)\sqrt{3}\,dx\,dy = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-y} x^2+y^2\,dx\,dy = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{(1-y)^3}{3}+y^2(1-y)\,dy$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\int_0^1 1-3y+6y^2-4y^3\,dy = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{2}+2-1\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{6}}}$$

---

15) To vypadá příliš složitě. Hmotnosti sfér jsou zřejmě $M = 4\pi R^2\rho$ a $4\pi r^2\rho = m$

Gravitační síla by pak měla být rovna $F_g = GMm\int_{S_1}\int_{S_2}\frac{1}{\ell^2}\,dS_2\,dS_1$, kde ℓ je vzdálenost bodů obou sfér, což při přepisu do sf. souřadnic:

$x = R\cos\varphi\sin\psi$ $\qquad\tilde{x} = d + r\cos\tilde{\varphi}\sin\tilde{\psi}$

$y = R\sin\varphi\sin\psi$ $\qquad\tilde{y} = r\sin\tilde{\varphi}\sin\tilde{\psi}$

$z = R\cos\psi$ $\qquad\tilde{z} = r\cos\tilde{\psi}$

dá $$F_g = 16\pi^2 R^2 r^2 \rho^2 G \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^2 r^2 \sin\psi \sin\tilde{\psi}\ d\tilde{\psi}\, d\psi\, d\tilde{\varphi}\, d\varphi}{d^2+R^2+r^2+2d(r\cos\tilde{\varphi}\sin\tilde{\psi}-R\cos\varphi\sin\psi)-2rR\left[\sin\tilde{\psi}\sin\psi\cos(\tilde{\varphi}-\varphi)-\cos\tilde{\psi}\cos\psi\right]}$$

To by asi mělo vyjít $\frac{1}{d^2}$ ze symetrií a výsledek by tak zřejmě měl být $\frac{16\pi^2 R^2 r^2 \rho^2 G}{d^2}$.

16) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad x^2+y^2 = ax$ $\quad T=\left[\frac{M_x}{M}, \frac{M_y}{M}, \frac{M_z}{M}\right]$ $\quad M=\int 1\, dS$, $M_x = \int x\, dS$, $M_y=\int y\, dS$, $M_z = \int z\, dS$

$\hookrightarrow \det G(D_p) = 1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 2$

$r^2 = ar\cos\varphi \Rightarrow r\in(0, a\cos\varphi)$. $\quad a>0 \Rightarrow \varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$a<0 \Rightarrow \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$

Symetrie $\Rightarrow$ nezáleží na znaménku a! BÚNO $a>0$

$$M = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{2}\, r\, dr\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}a^2\pi}{4}$$

$$M_x = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{a\cos\varphi} r\cos\varphi \cdot r\, dr\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}\cdot\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}a^3\pi}{8}$$

$$M_y = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{a\cos\varphi} r\sin\varphi\cdot r\, dr\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi = 0$$

$$M_z = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{a\cos\varphi} r\cdot r\, dr\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{4\sqrt{2}a^3}{9}$$

$$T = \left[\frac{a}{2}, 0, \frac{16a}{9\pi}\right]$$

17) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x,y,z\geq 0$ $\Rightarrow$

p: $x = a\cos\varphi\sin\psi$ $\quad \varphi\in(0,\pi/2)$

$y = a\sin\varphi\sin\psi$ $\quad \psi\in(0,\pi/2)$

$z = a\cos\psi$

$\sqrt{\det G(D_p)}$ = (viz př. 12) $= a^2\sin\psi$

$$M = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} a^2\sin\psi\, d\varphi\, d\psi = \frac{\pi}{2}a^2.$$

$$M_x = M_y = M_z = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} a\cos\psi\, a^2\sin\psi\, d\varphi\, d\psi = \frac{\pi}{2}a^3\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2\psi}{2}\, d\psi = \frac{\pi a^3}{4}$$

$$T = \left[\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$$

18) p: $x = r\cos\varphi$ $\quad r\in(0,a)$

$y = r\sin\varphi$ $\quad \varphi\in(0,\pi)$

$z = h\varphi$

Viz př. 8, $\sqrt{\det G} = \sqrt{r^2+h^2}$, $M = \frac{\pi h^2}{2}\cdot \operatorname{argsinh}\frac{a}{h} + \frac{a\pi}{2}\sqrt{a^2+h^2}$

$$M_x = \int_0^a\int_0^\pi r\cos\varphi\sqrt{r^2+h^2}\, d\varphi\, dr = 0, \quad M_y = \int_0^a\int_0^\pi r\sin\varphi\sqrt{r^2+h^2}\, d\varphi\, dr = 2\int_0^a r\sqrt{r^2+h^2}\, dr = \int_{h^2}^{\sqrt{a^2+h^2}}\sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3}\left(\sqrt{(a^2+h^2)^3} - h^3\right)$$

$$M_z = \int_0^a\int_0^\pi h\varphi\sqrt{r^2+h^2}\, d\varphi\, dr = \frac{h\pi^2}{2}\cdot\left[\frac{h^2}{2}\operatorname{argsinh}\frac{a}{h} + \frac{a}{2}\sqrt{a^2+h^2}\right]$$

$$\Rightarrow T = \left[0, \frac{2}{3}\left(\sqrt{(a^2+h^2)^3} - h^3\right)\cdot\frac{1}{M}, \frac{h\pi}{2}\right]$$

19) $\int\limits_S \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\, dS \qquad x^2+y^2+z^2=a^2$

BÚNO $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,z_0)$, $z_0 > a$ $\qquad b = \frac{z_0}{a} > 1$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{a^2 \sin\varphi}{\sqrt{a^2+z_0^2-2az_0\cos\varphi}}\, d\varphi\, d\psi = 2\pi a \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1+\frac{z_0^2}{a^2}-2\frac{z_0}{a}\cos\varphi}} \quad \left|\begin{array}{l} t = 1+b^2-2b\cos\varphi \\ dt = 2b\sin\varphi\, d\varphi \end{array}\right.$$

$$= \frac{2\pi a}{2b}\cdot \int_{(1-b)^2}^{(1+b)^2} t^{-1/2}\, dt = \frac{2\pi a}{b}\cdot\left(1+b-(b-1)\right) = \frac{4\pi a}{b} = \frac{4\pi a^2}{z_0}$$ pro bod vně kulové plochy

Pro bod uvnitř: $b<1$, $\sqrt{(1-b)^2} = 1-b \Rightarrow$ výsledek je $4\pi a$ nezávisle na z_0.

V obecném bodě rotací nahradíme z_0 výrazem $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$

Úvahy tohoto typu by zřejmě šly použít i v příkladu 15,

---

20) Bohužel neumím převést na matematický problém.