Sada příkladů 8/9

Křivkový a plošný integrál

Plošný integrál 2. druhu

1. Spočtěte $\int_S (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je "vnější strana" kužele $x^2+y^2=z^2$, $0 \le z \le h$.

2. Spočtěte $\int_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je "vnější strana" sféry $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

3. Spočtěte $\int_S (z-R)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $R \le z \le 2R$, orientovaná normálou ven.

4. Spočtěte $\int_S z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je část plochy $x-y+z=1$, $x, z \ge 0$, $y \le 0$, orientované tak, že s vektorem ve směru kladné osy y svírá ostrý úhel.

5. Spočtěte $\int_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je část paraboloidu $x^2+y^2+2az=a^2$, $x \le 0$, $y, z \ge 0$, orientovaná tak, že pro normálový vektor $\mathbf{n}$ platí $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} > 0$, $\mathbf{k}$ je vektor ve směru kladné osy y.

6. Spočtěte $\int_S \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}$, kde S je elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, orientovaný normálou ven.

Stokesova a Gauß–Ostrogradského věta

7. Spočtěte křivkový integrál $\int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, kde C je kružnice $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$, orientovaná kladně vzhledem k vektoru $(1,1,1)$.

8. Spočtěte křivkový integrál $\int_C (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$, kde C je průnik krychle $[0,a]^3$ s rovinou $x+y+z=\frac{3}{2}a$, orientovaný kladně vzhledem k vektoru $(1,1,1)$.

9. Spočtěte křivkový integrál $\int_C y^2z^2\,\mathrm{d}x + z^2x^2\,\mathrm{d}y + x^2y^2\,\mathrm{d}z$, kde C je elipsa $a(\sin^2 t, 2\sin t\cos t, \cos^2 t)$, $t \in [0,2\pi]$, orientovaná ve směru rostoucího parametru t.

10. Pomocí Stokesovy věty dokažte, že $\int_C yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0$ pro libovolnou uzavřenou po částech hladkou křivku.

11. Spočtěte křivkový integrál $\int_C (x^2 - yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 - xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\,\mathrm{d}z$, kde C je oblouk šroubovice $\widehat{AB}$ $(a\cos t, a\sin t, \frac{h}{2\pi}t)$, $A = (a, 0, 0)$, $B = (a, 0, h)$ tak, že křivku doplníte úsečkou BA na uzavřenou křivku a použijete Stokesovu větu.

12. Spočtěte $\int_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je vnějšek sféry $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

13. Spočtěte $\int_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$, kde S je část kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$, a $\cos\alpha \ldots$ jsou směrové kosiny normály k této ploše.

14. Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = -u + a\cos v$, $u \ge 0$ a rovinami $x = 0$ a $z = 0$.

15. Dokažte Archimédův zákon.

16. Najděte objem sudu, ohraničeného plochami $z = \pm c, x = a\cos u\cos v + b\sin u\sin v, y = a\cos u\sin v - b\sin u\cos v, z = c\sin u$.

17. Nechť f a g jsou dvakrát spojitě diferencovatelné funkce až do hranice oblasti Ω, která je ohraničená jednoduchou uzavřenou plochou S orientovanou normálou $\mathbf{n}$ ven. Ukažte, že platí:

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega f\Delta g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int_\Omega \nabla f\cdot\nabla g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \int_S g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S,\ \text{je-li } \Delta f = \Delta g = 0$$

PLOŠNÝ INTEGRÁL 2. DRUHU

$\vec{T}$ vektorové pole. $\int_S \vec{T}\cdot d\vec{S} := \int_S (\vec{T}\cdot\vec{\nu})\,dS := \int_S T_x\,dydz + T_y\,dxdz + T_z\,dxdy$,

kde $\vec{T} = (T_x, T_y, T_z)$. Zde ovšem závisí na parametrizaci plochy, konkrétně na její orientaci!

Je-li $\varphi: E \to \mathbb{R}^3$ parametrizace plochy S, pak normálový vektor $\vec{\nu}$ je jednotkový vektor

ve směru $$\vec{w}_\varphi = \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}\frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}\frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1},\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1},\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} & \vec{e}_1 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} & \vec{e}_2 \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} & \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t_1}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t_2}$$

$\left(\vec{\nu} = \frac{\vec{w}_\varphi}{\|\vec{w}_\varphi\|}\right)$

Tímto způsobem chápeme zápis $dxdy = (w_\varphi)_3\,dt_1dt_2$ atd.

Proto $\int_S T_x\,dydz + T_y\,dxdz + T_z\,dxdy = \int_S \vec{T}\cdot\vec{\nu}\,\|w_\varphi\|\,dS$

Pozorování: změna pořadí parametrů otočí směr $\vec{w}_\varphi$ a tedy $\vec{\nu}$.

---

1) S kužel: $x^2+y^2=z^2$, $z\in(0,h)$, tj. $r=z$, $z\in(0,h)$ ve válcových souřadnicích.

parametrizace: $$p:\ \begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= r \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\varphi\in(0,2\pi) \\ &r\in(0,h) \end{aligned}$$

Vnější ~~...~~ strana kužele $\Rightarrow$ normála směřuje ven. $\frac{\partial p}{\partial r} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1)$

$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)$

$\frac{\partial p}{\partial r}\times\frac{\partial p}{\partial \varphi} = (-r\cos\varphi, -r\sin\varphi, r)$ .... směřuje dovnitř

$\Rightarrow$ správné pořadí je φ, r, pak $\frac{\partial p}{\partial \varphi}\times\frac{\partial p}{\partial r}$ směřuje ven. a $\vec{w}_p = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, -r)$

$$\int_S (y-z)\,dydz + (z-x)\,dzdx + (x-y)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^h r(\sin\varphi-1)\cdot(r\cos\varphi) + r(1-\cos\varphi)\cdot r\sin\varphi + r(\cos\varphi-\sin\varphi)\cdot(-r)\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^h -2r^2\cos\varphi + 2r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi = 0, \text{ protože } \int_0^{2\pi}\cos\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi = 0$$

Výpočet přes integrál 1. druhu a jednotkový vektor: $\vec{\nu} = \frac{\vec{w}_p}{\|\vec{w}_p\|} = (\cos\varphi, \sin\varphi, -1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ a $D_p = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\sqrt{\det G} = \sqrt{2}\,r$

a $\vec{T}\cdot\vec{\nu}$ spolu s $\sqrt{\det G}$ vedou na totožný integrál jako výše.

2.) $\int_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, S vnější strana sféry $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (2)

parametrizace : $p: \begin{aligned} x &= a + R\cos\varphi \sin\theta \\ y &= b + R \sin\varphi \sin\theta \\ z &= c + R\cos\theta \end{aligned}$ $\quad \varphi \in (0,2\pi)$, $\theta \in (0,\pi)$

$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = (-R\sin\varphi \sin\theta, R\cos\varphi \sin\theta, 0)$ $\quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = (R\cos\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\cos\theta, -R\sin\theta)$

$\frac{\partial p}{\partial \varphi} \times \frac{\partial p}{\partial \theta} = (-R^2\cos\varphi\sin^2\theta, -R^2\sin\varphi\sin^2\theta, -R^2\sin\theta\cos\theta)$

Pro θ blízko nuly chceme, aby normála směřovala vzhůru, ale zde je záporná $\Rightarrow$ změna pořadí

$\Rightarrow \vec{w}_p = R^2\sin\theta \cdot (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$

Dále potřebujeme $\begin{aligned} x^2 &= a^2 + 2aR\cos\varphi\sin\theta + R^2\cos^2\varphi\sin^2\theta \\ y^2 &= b^2 + 2bR\sin\varphi\sin\theta + R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta \\ z^2 &= c^2 + 2cR\cos\theta + R^2\cos^2\theta \end{aligned}$

$$\int_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^2\sin\theta \cdot \Big[(a^2+2aR\cos\varphi\sin\theta + R^2\cos^2\varphi\sin^2\theta)\cdot\cos\varphi\sin\theta + (b^2+2bR\sin\varphi\sin\theta+R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)\cdot\sin\varphi\sin\theta + (c^2+2cR\cos\theta+R^2\cos^2\theta)\cdot\cos\theta\Big]\, d\varphi\, d\theta$$

$\Rightarrow$ Pozorování: $\int_0^{2\pi}\cos^k\varphi\, d\varphi = 0$ pokud je k liché, totéž pro liché mocniny $\sin\varphi$

$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi = \pi$

$$= \int_0^{\pi} R^2\sin\theta \cdot \left[2\pi aR\sin^2\theta + 2\pi bR\sin^2\theta + 2\pi c^2\cos\theta + 4\pi cR\cos^2\theta + 2\pi R^2\cos^3\theta\right] d\theta$$

$\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0$, $\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^3\theta = 0$!

$\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{3}[\cos^3\theta]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$

$\int_0^{\pi}\sin\theta\sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi}\sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \quad = \underline{\underline{\frac{8\pi R^3}{3}\cdot(a+b+c)}}$$

3) $\int\limits_S (z-R)^2 dxdy$, kde S je $x^2+y^2+z^2 = 2Rz$, $z \in (R, 2R)$ (3)

$$x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2$$

parametrizace : $x = R\cos\varphi \sin\theta$ $\quad \varphi \in (0, 2\pi)$

$p:$ $y = R\sin\varphi \sin\theta$ $\quad z \in (0, \pi/2)$!! aby $z-R>0$

$z = R + R\cos\theta$

Podobně jako v 2) : $\vec{w_p} = R^2 \sin\theta (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$

$$\int\limits_S (z-R)^2 dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} R^2\cos^2\theta \cdot R^2 \sin\theta \cos\theta \, d\varphi d\theta = 2\pi R^4 \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \sin\theta \, d\theta = 2\pi R^4 \left[-\frac{1}{4}\cos^4\theta\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi R^4}{2}}}$$

4) $I = \int\limits_S z\,dydz + x\,dzdx + y\,dxdy$, $S: x-y+z=1$, $x, z \geq 0$, $y \leq 0$

normála : $\pm(1,-1,1)$ má svírat s vektorem $(0,1,0)$ ostrý úhel $\Rightarrow (-1,1,-1)$!!

parametrizace : $x = x$ $\quad x \in (0,1)$

$p:$ $y = y$ $\quad y \in (x-1, 0)$

$z = 1-x+y$

$\frac{\partial p}{\partial x} = (1,0,-1)$, $\frac{\partial p}{\partial y} = (0,1,1)$

$\frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{\partial p}{\partial y} = (1,-1,1) \Rightarrow \vec{w_p} = (-1,1,-1)$

$$I = \int_0^1 \int_{x-1}^0 (1-x+y)\cdot(-1) + x\cdot 1 + y\cdot(-1) \, dy dx = \int_0^1 \int_{x-1}^0 -1+2x-2y \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^1 \left[(2x-1)y\right]_{x-1}^0 - \left[y^2\right]_{x-1}^0 dx = \int_0^1 -(2x-1)(x-1) + (x-1)^2 dx = \int_0^1 -x^2+x \, dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

5) $I = \int\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, kde $S: x^2+y^2+2az = a^2$, $x \leq 0$, $y, z \geq 0$

parametrizace : $x = r\cos\varphi$ $\quad x \leq 0 \Rightarrow \varphi \in (\pi/2, \frac{3}{2}\pi)$, $y \geq 0 \Rightarrow \varphi \in (\pi/2, \pi)$

$p:$ $y = r\sin\varphi$

$z = \frac{a^2-r^2}{2a}$ $\quad z \geq 0 : r \in (0, a)$

$\frac{\partial p}{\partial r} = (\cos\varphi, \sin\varphi, -\frac{r}{a})$, $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)$, $\frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \left(\frac{r^2\cos\varphi}{a}, \frac{r^2\sin\varphi}{a}, r\right)$

$k = (0,1,0)$, $\left(\frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p}{\partial \varphi}\right)\cdot k = \frac{r^2\sin\varphi}{a} > 0$ OK $\Rightarrow \vec{w_p} = \frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \left(\frac{r^2\cos\varphi}{a}, \frac{r^2\sin\varphi}{a}, r\right)$

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^a r^2\cos^2\varphi \cdot \frac{r^2\cos\varphi}{a} + r^2\sin^2\varphi \cdot \frac{r^2\sin\varphi}{a} + \frac{(a^2-r^2)^2}{4a^2}\cdot r \, dr d\varphi = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{a^4}{5}\cdot(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) + \frac{1}{4a^2}\left[-\frac{(a^2-r^2)^3}{6}\right]_0^a d\varphi$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} a^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\cos^3\varphi + \frac{1}{5}\sin^3\varphi + \frac{1}{24}\right) d\varphi . \text{ Ze symetrie } \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3\varphi = -\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3\varphi \Rightarrow I = \underline{\underline{\frac{\pi a^4}{48}}}$$

6) $I = \iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}$ $\qquad S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

par. $\quad \varphi: \begin{array}{l} x = a\cos\varphi\sin\theta \\ y = b\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\cos\theta \end{array} \qquad \begin{array}{l} \varphi \in (0, 2\pi) \\ \theta \in (0, \pi) \end{array}$

Už víme, že pro orientaci ven potřebujeme pořadí $\vec{w}_\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}$ (viz př. 2))

a proto $\vec{w}_\varphi = \left(bc\cos\varphi\sin^2\theta, ac\sin\varphi\sin^2\theta, ab\sin\theta\cos\theta \right)$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{a\cos\varphi\sin\theta} \cdot bc\cos\varphi\sin^2\theta + \frac{1}{b\sin\varphi\sin\theta} \cdot ac\sin\varphi\sin^2\theta + \frac{1}{c\cos\theta} \cdot ab\sin\theta\cos\theta \, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = \frac{4\pi}{abc}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \right) = 4\pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$