

## Křivkový a plošný integrál

### Plošný integrál 2. druhu

1. Spočtěte  $\int_S (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy$ , kde  $S$  je "vnější strana" kužele  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq h$ .
2. Spočtěte  $\int_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , kde  $S$  je "vnější strana" sféry  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ .
3. Spočtěte  $\int_S (z-R)^2 dx dy$ , kde  $S$  je část kulové plochy  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ ,  $R \leq z \leq 2R$ , orientovaná normálou ven.
4. Spočtěte  $\int_S z dy dz + x dz dx + y dx dy$ , kde  $S$  je část plochy  $x-y+z=1$ ,  $x, z \geq 0$ ,  $y \leq 0$ , orientované tak, že s vektorem ve směru kladné osy  $y$  svírá ostrý úhel.
5. Spočtěte  $\int_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , kde  $S$  je část paraboloidu  $x^2 + y^2 + 2az = a^2$ ,  $x \leq 0$ ,  $y, z \geq 0$ , orientovaná tak, že pro normálový vektor  $\mathbf{n}$  platí  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$ ,  $\mathbf{k}$  je vektor ve směru kladné osy  $y$ .
6. Spočtěte  $\int_S \frac{dy dz}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z}$ , kde  $S$  je elipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , orientovaný normálou ven.

### Stokesova a Gauß–Ostrogradského věta

7. Spočtěte křivkový integrál  $\int_C y dx + z dy + x dz$ , kde  $C$  je kružnice  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x + y + z = 0$ , orientovaná kladně vzhledem k vektoru  $(1, 1, 1)$ .
8. Spočtěte křivkový integrál  $\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$ , kde  $C$  je průnik krychle  $[0, a]^3$  s rovinou  $x + y + z = \frac{3}{2}a$ , orientovaný kladně vzhledem k vektoru  $(1, 1, 1)$ .
9. Spočtěte křivkový integrál  $\int_C y^2 z^2 dx + z^2 x^2 dy + x^2 y^2 dz$ , kde  $C$  je elipsa  $a(\sin^2 t, 2 \sin t \cos t, \cos^2 t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , orientovaná ve směru rostoucího parametru  $t$ .

10. Pomocí Stokesovy věty dokažte, že  $\int_C yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz = 0$  pro libovolnou uzavřenou po částech hladkou křivku.
11. Spočtěte křivkový integrál  $\int_C (x^2 - yz) \, dx + (y^2 - xz) \, dy + (z^2 - xy) \, dz$ , kde  $C$  je oblouk šroubovice  $\widehat{AB}$   $(a \cos t, a \sin t, \frac{h}{2\pi}t)$ ,  $A = (a, 0, 0)$ ,  $B = (a, 0, h)$  tak, že křivku doplníte úsečkou  $BA$  na uzavřenou křivku a použijete Stokesovu větu.
12. Spočtěte  $\int_S x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dz \, dx + z^3 \, dx \, dy$ , kde  $S$  je vnějšek sféry  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .
13. Spočtěte  $\int_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) \, dS$ , kde  $S$  je část kuželové plochy  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq h$ , a  $\cos \alpha \dots$  jsou směrové kosiny normály k této ploše.
14. Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochou  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = -u + a \cos v$ ,  $u \geq 0$  a rovinami  $x = 0$  a  $z = 0$ .
15. Dokažte Archimédův zákon.
16. Najděte objem sudu, ohraničeného plochami  $z = \pm c$ ,  $x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v$ ,  $y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v$ ,  $z = c \sin u$ .
17. Nechť  $f$  a  $g$  jsou dvakrát spojitě diferencovatelné funkce až do hranice oblasti  $\Omega$ , která je ohraničená jednoduchou uzavřenou plochou  $S$  orientovanou normálou  $\mathbf{n}$  ven. Ukažte, že platí:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, dS &= \int_{\Omega} \Delta f \, dx \, dy \, dz \\ \int_S f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, dS &= \int_{\Omega} f \Delta g \, dx \, dy \, dz + \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx \, dy \, dz \\ \int_S f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, dS &= \int_S g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, dS, \text{ je-li } \Delta f = \Delta g = 0 \end{aligned}$$

# INTEGRÁLNÍ VĚTY

(1)

Gauss - Ostrogradského věta:  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  omezená, ohraničená. Její hranice  $\partial\Omega$  zohraněná  
( $n-1$ )-plocha s konečným plošným obsahem.  $\nu(x)$  ... jednotkový vnější normálový vektor  
k  $\partial\Omega$ .  $F \in C(\bar{\Omega})$  t.j.  $\frac{\partial F}{\partial x_i}$  ex. všude a lze spojitě rozšířit na  $\bar{\Omega}$ . Pak

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} F \nu_i dS.$$

Je-li  $\vec{T} \in C(\bar{\Omega})$  t.j.  $\frac{\partial T_i}{\partial x_j}$  ex. všude a lze spojitě rozšířit na  $\bar{\Omega}$ , pak

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{T} dx = \int_{\partial\Omega} \vec{T} \cdot \nu dS = \int_{\partial\Omega} (T_1 \nu_1 + T_2 \nu_2 + T_3 \nu_3) dS$$

plošný int. 2. druhu

Důkaz: Per partes :  $\int_{\Omega} U \frac{\partial V}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} UV \nu_i dS - \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial x_i} V dx$

Greenova věta (= varianta Gaussa pro 2D)

$\varphi$ : kladně orientovaná reg. Jordanova křivka, po částech  $C^1$ .  $\Omega := \operatorname{Int} \varphi$

1)  $\vec{T} \in C(\bar{\Omega})$  t.j. ex.  $\frac{\partial T_1}{\partial x_1}, \frac{\partial T_2}{\partial x_2}$  všude v  $\Omega$  a lze je spojitě rozšířit na  $\bar{\Omega}$ .

Pak 
$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{T} dx = \int_{\varphi} (-T_2, T_1) \cdot d\varphi$$

2) Stejně jako 1), jen pro  $\frac{\partial T_1}{\partial x_2}$  a  $\frac{\partial T_2}{\partial x_1}$ . Pak 
$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \right) dx = \int_{\varphi} \vec{T} \cdot d\varphi$$

Stokesova věta (= Green, ale ve 3D pro plochu, jejíž hranice je křivka)

Nechť  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je zobrazení, které parametrizuje 2-plochu  $M \subset \mathbb{R}^3$ , tj.

$M = p(E)$ , kde  $E \subset \mathbb{R}^2$ .  $\varphi$  nechť je křivka ve 2D jako v Greenově větě,

po  $\varphi$  je pak křivka ve 3D,  $\tilde{M} = p(\operatorname{Int} \varphi)$  je 2-plocha, které je obrazem

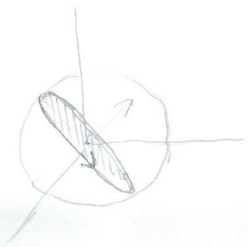
vnitřní křivky  $\varphi$ .  $\vec{T} \in C^1$  na množině obsahující  $\tilde{M} \cup \langle p \circ \varphi \rangle$ . Pak

$$\int_{\tilde{M}} (\operatorname{rot} \vec{T}) \cdot \nu dS = \int_{p \circ \varphi} \vec{T} \cdot d(p \circ \varphi)$$

kde  $\nu(x) = \frac{w_p(\vec{p}'(x))}{\|w_p(\vec{p}'(x))\|}$ , pokud je  $\varphi$  orientována v kladném smyslu

$$\operatorname{rot} \vec{T} = \left( \frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_3}, \frac{\partial T_1}{\partial x_3} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1}, \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \right)$$

7



$$\vec{T} = (y, z, x)$$

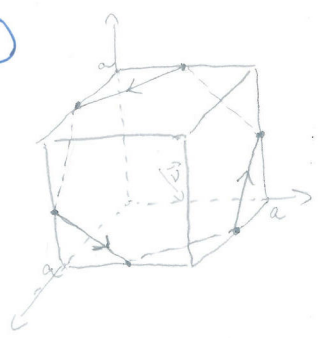
$$\text{rot } \vec{T} = (-1, -1, -1), \quad \vec{v} = (1, 1, 1) \cdot \frac{1}{\|(1, 1, 1)\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{T} \cdot d\vec{c} = \int_M (-1, -1, -1) \cdot \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} dS = \int_M -\sqrt{3} dS = -\sqrt{3} \pi,$$

protože  $\int_M dS$  je obsah kruhu ~~kružnice~~  $M$ , což je kruh o poloměru 1.

2

8



Průnik krychle s rovinou je šestiúhelník

$$\vec{T} = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$$

$$\text{rot } \vec{T} = (-2y - 2z, -2z - 2x, -2x - 2y) = -2 \cdot (y + z, z + x, x + y)$$

$$\vec{v} = (1, 1, 1) \cdot \frac{1}{\|(1, 1, 1)\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_C \vec{T} \cdot d\vec{c} &= \int_M -\frac{2}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) \cdot (y + z, z + x, x + y) dS = \frac{8}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}} \int_M x + y + z dS \\ &= -\frac{4}{\sqrt{3}} \int_M \frac{3}{2} a dS = -2\sqrt{3} a \int_M dS = -12\sqrt{3} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} a^3, \end{aligned}$$

protože  $\int_M dS$  je obsah šestiúhelníku o straně  $\frac{a}{2}\sqrt{2} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2$

9

$$\vec{T} = (y^2 z^2, z^2 x^2, x^2 y^2)$$

$$C: a \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}, \sin 2t, \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) \quad t \in [0, 2\pi] \dots$$

elipse se oskami dvakrát!

Významné body na elipse:  $t=0: (0, 0, 1) \cdot a$

$$t=\pi/4: \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \cdot a$$

$$t=\pi/2: (1, 0, 0) \cdot a$$

$$t=3\pi/4: \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right) \cdot a$$

$$\text{rot } \vec{T} = (2x^2(y-z), 2y^2(z-x), 2z^2(x-y))$$

$$\dots \text{leží v rovině } Ax + By + Cz + D = 0$$

$$t=0: Ca + D = 0$$

$$t=\pi/2: Aa + D = 0 \Rightarrow A = C$$

$$t=\pi/4: \frac{1}{2}Aa + Ba + \frac{1}{2}(Ca + D) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\int_C \vec{T} \cdot d\vec{c} = \int_M \frac{4a}{\sqrt{2}} (1, 0, 1) \cdot (x^2(y-z), y^2(z-x), z^2(x-y)) dS$$

$$= \int_M 2\sqrt{2}a [x^2y - x^2z + z^2x - z^2y] dS, \quad (=*)$$

$$\Rightarrow \text{rovina je } x + z - \frac{a}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \text{normála je } (1, 0, 1).$$

Směr odhánění  $\Rightarrow$  směr normály je ~~dobro~~ opačný!

$$\vec{v} = -\frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$$

kde  $M$  je vnitřek elipsy, parametrizované  $x = \frac{a}{2} - r \frac{\cos 2t}{2}$

$$p: \begin{cases} y = r \sin 2t \\ z = \frac{a}{2} + r \frac{\cos 2t}{2} \end{cases}$$

$$t \in (0, \pi), r \in (0, a)$$

$$Dp = \begin{pmatrix} -\frac{\cos 2t}{2} & r \sin 2t \\ \sin 2t & 2r \cos 2t \\ \frac{\cos 2t}{2} & -r \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 2t}{2} & r \sin 2t \cos 2t \\ r \sin 2t \cos 2t & r^2(2 + 2\cos^2 2t) \end{pmatrix}$$

$$\det G = 2r^2$$



$$\begin{aligned}
 (*) &= -\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \int_0^\pi \int_0^a (x-z) \cdot (ay-xz) r dr dt = \\
 &= -4 \int_0^\pi \int_0^a (-r \cos 2t) \cdot \left( r^2 \frac{\cos^2 2t}{4} + a r \sin 2t - \frac{a^2}{4} \right) r dr dt \quad | \varphi = 2t \\
 &= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^a -r^4 \frac{\cos^3 \varphi}{4} - a r^3 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{a^2 r^2}{4} \cos \varphi dr d\varphi \\
 &= -2a \int_0^{2\pi} -\frac{\cos^3 \varphi}{20} - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{4} + \frac{\cos \varphi}{12} d\varphi = \underline{\underline{0}}
 \end{aligned}$$

(10)  $\vec{T} = (yz, xz, xy)$   
 $\text{rot } \vec{T} = (0, 0, 0)$  a integrál z nulového vektorového pole je vždy nula

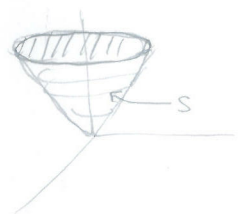
(11)  $\vec{T} = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$   
 $\text{rot } \vec{T} = (0, 0, 0)$ , viz 10,  $I = 0$  !!

(12)  $I = \int_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$ ,  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  orientovaná vnějším normálovým vektorem

Gauss:  $\vec{T} = (x^3, y^3, z^3)$   $S = \partial \Omega$ , kde  $\Omega$  je koule  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$   
 $\text{div } \vec{T} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$

$$I = \int_\Omega 3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 3 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \underline{\underline{\frac{12\pi a^5}{5}}}$$

(13)  $I = \int_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$   $S: x^2 + y^2 = z^2, z \in (0, h)$   
 $I = \int_S \vec{T} \cdot d\vec{S}$ , kde  $\vec{T} = (x^2, y^2, z^2)$   $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  jsou směrové kosiny normály  $\perp S$



$S$  samo o sobě nemá hranice oblasti, musíme přidat podstavu koule  $P$ ,

tedy  $P: \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = h \end{cases} \quad \begin{matrix} \varphi \in (0, 2\pi) \\ r \in (0, h) \end{matrix}$  vnější normála k  $P$  je  $(0, 0, 1)$

$$\int_S \vec{T} \cdot d\vec{S} = \int_\Omega \text{div } \vec{T} dx dy dz - \int_P \vec{T} \cdot d\vec{S} = \int_\Omega 2(x+y+z) dx dy dz - \int_P z^2 dS$$

$z=h, \int_P z^2 dS = h^2 \int_P 1 dS = \int_P h^2 = \pi h^4$

Ze symetrie koule:  $\int_\Omega x dx dy dz = \int_\Omega y dx dy dz = 0$  !!  
 $2 \int_\Omega x+y+z dx dy dz = 2 \int_\Omega z dx dy dz = 2 \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^z z r dr d\varphi dz = \frac{\pi h^4}{2}$

$I = \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}$

14

$$x = u \cos v$$

$$y = u \sin v$$

$$z = a \cos v - u, \text{ kde } u \geq 0,$$

$$x = 0$$

$z = 0$  omezuji těleso,  $a \geq 0$ .

$$x \geq 0 \Rightarrow \cos v \geq 0 \Rightarrow v \in (-\pi/2, \pi/2)$$

$$z \geq 0 \Rightarrow a \cos v - u \geq 0 \Rightarrow u \in (0, a \cos v)$$

Lze spočítat přímo:  $V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos v} \int_0^{a \cos v - u} u \, dz \, du \, dv = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos v} -\frac{u^2}{2} + u a \cos v \, du \, dv$

Jednodušší

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ -\frac{a^3 \cos^3 v}{3} + \frac{a^3 \cos^3 v}{2} \right] dv = \frac{1}{6} a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 v \, dv = \frac{1}{6} a^3 \left[ \sin v - \frac{\sin^3 v}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{2}{9} a^3}}$$

Přes Gaussov vektor:  $\operatorname{div} \vec{T} = 1$ ,  $\vec{T}$  lze volit např.  $\vec{T}(x, y, z) = (0, 0, z)$  nebo  $= \frac{1}{3}(x, y, z)$  atp.

$\partial\Omega$  se skládá ze dvou částí, samostatné plochy

$$x = u \cos v$$

$$y = u \sin v$$

$$z = a \cos v - u$$

a podstavy  $z=0$ ,  $x = u \cos v$   
 $y = u \sin v$

Proto  $V = \int_{\partial\Omega_1} \vec{T} \cdot d\vec{S} + \int_{\partial\Omega_2} \vec{T} \cdot d\vec{S}$

zvolíme  $\vec{T} = (0, 0, z)$

Parametrizace  $\partial\Omega_1$ :  $p: \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = a \cos v - u \end{cases}$

$$\frac{\partial p}{\partial u} = (\cos v, \sin v, -1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = (-u \sin v, u \cos v, -a \sin v)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} &= (-a \sin^2 v + u \cos v, \\ &\quad a \sin v \cos v - u \sin v, \\ &\quad u) \end{aligned} \right\}$$

$z$ -ová souřadnice normály míří vzhůru (je kladná)  $\Rightarrow$  OK!

$z$ -ová souřadnice normály je nejjednodušší výraz  $\Rightarrow$  pole  $\vec{T} = (0, 0, z)$  je nejvhodnější.

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega_1} \vec{T} \cdot d\vec{S} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos v} z \cdot u \, du \, dv = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos v} (a \cos v - u) u \, du \, dv = \frac{2}{9} a^3 \text{ viz výše}$$

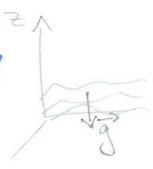
$\partial\Omega_2$ : normála je  $(0, 0, -1)$ :  $\int_{\partial\Omega_2} \vec{T} \cdot d\vec{S} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos v} z \cdot (-1) \, du \, dv = \iint 0 \, du \, dv = 0$

$$\int_{\partial\Omega_1} + \int_{\partial\Omega_2} = V = \underline{\underline{\frac{2}{9} a^3}}$$

15) Dikaz z Wikipedie :o)

Vetřaková síla " $F_{vz} = - \int_{\partial \Omega} p dS$ " přesněji je to ale jinak. Zde je na levé straně vektor a na pravé skalár. Pro kapalinu v klidu je tenzor napětí  $S = -pI$ , kde  $I$  je jednotkový tenzor. Síla působící na těleso je pak  $\int_{\partial \Omega} S n dS = - \int_{\partial \Omega} p n dS$ .  $n$  je normálový vektor. Gaussův vektor je  $\int_{\partial \Omega} -p n dS = \int_{\partial \Omega} S n dS = \int_{\Omega} \text{div } S dx = - \int_{\Omega} \nabla p dx$ .

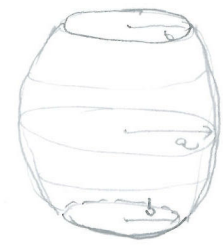
Rovnováha ~~teřtiny~~ : ~~teřtiny~~ ~~teřtiny~~ ~~teřtiny~~ ,  $-\nabla p = \rho \vec{g}$  , kde  $\rho$  je hustota teřtiny  
( $\rho = \rho(z)$ )  
 $\int_{\Omega} \rho \vec{g} dx = \rho \vec{g} V = F_g$  pro teřtinu o objemu ponořené tělesa



16)  $z = \pm c$

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos u \cos v + b \sin u \sin v \\ y &= a \cos u \sin v - b \sin u \cos v \\ z &= c \sin u \end{aligned} \right\} \quad x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u, \quad u \in (0, 2\pi)$$

$$u \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \begin{aligned} u = -\pi/2 : z = -c, \quad x^2 + y^2 &= b^2 \\ u = 0 : z = 0, \quad x^2 + y^2 &= a^2 \\ u = \pi/2 : z = c, \quad x^2 + y^2 &= b^2 \end{aligned}$$



Prímý výpočet :  $V = \int_{-c}^c S(z) dz$  , kde  $S(z)$  je obsah kruhu o poloměru  $\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}$   
 $= \pi \cdot (a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)$

$$\begin{aligned} z &= c \sin u \\ dz &= c \cos u du \\ V &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi \cdot (a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u) c \cdot \cos u du = \pi c \int_{-1}^1 (a^2(1-t^2) + b^2 t^2) dt \\ t &= \sin u \\ dt &= \cos u du \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= 2\pi c \cdot \left( a^2 + \frac{b^2 - a^2}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{2}{3} \pi c (2a^2 + b^2)}} \end{aligned}$$

Gaussov vektor složitější. Pět se hodí  $\vec{T} = (0, 0, z)$

Dno :  $z = -c, \quad x^2 + y^2 = b^2, \quad \vec{n} = (0, 0, -1) \quad \int_{\text{dno}} z \cdot (-1) r dr dv = c \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^b r dr dv = c \pi b^2$

Víko :  $z = c, \quad x^2 + y^2 = b^2, \quad \vec{n} = (0, 0, 1) \quad \int_{\text{víko}} z \cdot 1 r dr dv = c \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^b r dr dv = c \pi b^2$



Plášť sudu:  $p: x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v$   
 $y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v$   
 $z = c \sin u$

$v \in (0, 2\pi)$   
 $u \in (-\pi/2, \pi/2)$

(6)

$$\frac{\partial p}{\partial u} = (-a \sin u \cos v + b \cos u \sin v, -a \sin u \sin v - b \cos u \cos v, c \cos u)$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = (-a \cos u \sin v + b \sin u \cos v, a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, 0)$$

$$\frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} = (-a^2 \cos^2 u \cos v - b^2 \sin u \cos u \sin v, -a^2 \cos^2 u \sin v + b^2 \sin u \cos u \cos v, -a^2 \sin u \cos u + b^2 \sin u \cos u)$$

Potřebujeme jen poslední složku  $\left(\frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v}\right)_z = (b^2 - a^2) \sin u \cos u$ .

Vnější normála: pro  $a > b$  a  $u < 0$  by měla směřovat dolů: zde je hladina  $\begin{pmatrix} \sin u < 0 \\ \cos u > 0 \\ (b^2 - a^2) < 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$  oběit znaménko.

$$\int_{\text{Plášť}} z \cdot (a^2 - b^2) \sin u \cos u \, dS = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c \cdot \sin u \cdot (a^2 - b^2) \sin u \cos u \, du \, dv = 2\pi c (a^2 - b^2) \cdot \frac{2}{3}$$

Plášť

Gulka  $V = 2c\pi b^2 + \frac{4}{3}\pi c (a^2 - b^2) = \frac{2}{3}\pi c (2a^2 + b^2)$

(17).  $\int_S \frac{\partial f}{\partial n} \, dS = \int_S \nabla f \cdot n \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \nabla f \, dx = \int_{\Omega} \Delta f \, dx$

$$\begin{aligned} \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} \, dS &= \int_S f \nabla g \cdot n \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}(f \nabla g) \, dx = \int_{\Omega} (\nabla g \cdot \nabla) f + f \Delta g \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g \, dx \end{aligned}$$

• Je-li  $\Delta f = \Delta g = 0$ , použijí předloží bod dvakrát:  $\left. \begin{aligned} \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} \, dS &= \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx \\ \int_S g \frac{\partial f}{\partial n} \, dS &= \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla f \, dx \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{to je} \\ \text{totež} \end{array}$