Fourierovy řady

Ortogonální polynomy

1. Ukažte, že Hermitovy polynomy (ortogonální v $L^2_{\mathrm{e}^{-x^2}}(\mathbb{R})$)

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$$

   řeší rovnici

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad (\text{resp. } \left(y'\mathrm{e}^{-x^2}\right)' = -2n\mathrm{e}^{-x^2} y).$$

   Ukažte, že platí

$$xH_n(x) = nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}H_{n+1}(x)$$
$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

2. Ukažte, že Laguerrovy polynomy (ortogonální v $L^2_{\mathrm{e}^{-x}}((0,\infty))$)

$$L_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n \mathrm{e}^{-x})$$

   řeší rovnici

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad (\text{resp. } \left(y'x\mathrm{e}^{-x}\right)' = -n\mathrm{e}^{-x} y).$$

   Ukažte, že

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k.$$

3. Ukažte, že Čebyševovy polynomy $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ (ortogonální v $L^2_{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}((-1,1))$) řeší rovnici

$$\left(y'\sqrt{1-x^2}\right)' = -n^2 \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Rozviňte $f(x) = \mathrm{sign}(x)$ na $(-1,1)$ do Čebyševových polynomů (tj. na $L^2_{1/\sqrt{1-x^2}}(-1,1)$).

5. Ukažte, že Legendreovy polynomy (ortogonální v $L^2((-1,1))$)
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((x^2-1)^n\Big)$$
řeší rovnici
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (\text{resp. } \Big(y'(1-x^2)\Big)' = -n(n+1)y).$$

6. Rozviňte $f(x) = \mathrm{sign}(x)$ na $(-1,1)$ do Legendreových polynomů (tj. na $L^2(-1,1)$).

7. Kulová plocha poloměru a je rozdělena „rovníkem“ na dvě polokoule. Na povrchu horní polokoule je konstantní potenciál $+V$, na povrchu dolní polokoule je potenciál $-V$. Určete elektrostatický potenciál vně i uvnitř koule.

8. Ukažte, že přidružené Legendreovy polynomy
$$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x),$$
$m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$, $l \in \mathbb{N}_0$, řeší rovnici
$$\Big(y'(1-x^2)\Big)' + \Big(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\Big)y = 0.$$

9. Dokažte, že platí
$$\int_{-1}^{1} P_{l'}^m P_l^m \,\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{l,l'}.$$

10. Dokažte, že sférické funkce
$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \Big(\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\Big)^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\vartheta)\mathrm{e}^{im\varphi}$$
splňují
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi)\overline{Y}_{lm}(\vartheta,\varphi)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

ORTOGONÁLNÍ POLYNOMY

1) $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$

Spočítáme $H_n'(x) = (-1)^n 2x\cdot e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) + (-1)^n e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(e^{-x^2}\right)$

$$= (-1)^n 2x\cdot e^{x^2}\cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(-2xe^{-x^2}\right) + (-1)^n e^{x^2}\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}\right)$$

Zde jsme použili $(x\cdot f)^{(n-1)} = x\cdot f^{(n-1)} + (n-1) f^{(n-2)}$ →

$$= (-1)^n e^{x^2}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(-4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}\right) - (n-1)2\cdot\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(-2xe^{-x^2}\right)\right]$$

$$= (-1)^n e^{x^2}\cdot(-2)\cdot\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-x^2}\right) + (n-1)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(-2xe^{-x^2}\right)\right]$$

$$= (-1)^{n-1}e^{x^2}\cdot 2n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-x^2}\right) = 2n H_{n-1}(x)$$

$$nH_{n-1}(x) + \tfrac12 H_{n+1}(x) = n\cdot(-1)^{n-1}e^{x^2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-x^2}\right) + \tfrac12 (-1)^{n+1} e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(e^{-x^2}\right) =$$

$$= (-1)^{n-1}e^{x^2}\cdot\left[n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-x^2}\right) + \frac12\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}\right)\right]$$

$$= (-1)^{n-1}e^{x^2}\cdot\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left((n-1)e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2}\right)\right]$$

$$= (-1)^{n}e^{x^2}\cdot\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(-2x^2e^{-x^2} - (n-1)e^{-x^2}\right)\right]$$

$$= (-1)^{n}e^{x^2}\cdot\left[x\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(-2xe^{-x^2}\right) + \underbrace{(n-1)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(-2xe^{-x^2}\right)} - \underbrace{(n-1)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-x^2}\right)}\right]$$

$=$

$$= (-1)^n e^{x^2}\, x\, \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) = x\cdot H_n(x)$$

Použitím výše uvedených vzorců $H_n''(x) = 2nH_{n-1}'(x) = 2n\cdot 2(n-1)H_{n-2}(x)$

$$= 4n(n-1)H_{n-2}(x)$$

$$-2xH_n'(x) = -2x\cdot 2n\cdot H_{n-1}(x) = -4n\cdot\left[(n-1)H_{n-2}(x) + \tfrac12 H_n(x)\right]$$

$$\Rightarrow H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 4n(n-1)H_{n-2}(x) - 4n(n-1)H_{n-2}(x) - 2nH_n(x) + 2nH_n(x) = \underline{\underline{0}}$$

2) $L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$

V explicitním vyjádření $L_n(x)$ v zadání je chyba. Správně je – a dokážeme to –

$$L_n(x) = (-1)^n \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k \qquad \text{(Stačí si všimnout znaménka u nejvyšší mocniny)}$$

Potřebujeme toto Tvrzeníčko: $\frac{d^m}{dx^m}\left(x^n e^{-x}\right) = (-1)^m e^{-x} \cdot \left[\sum_{k=0}^{m} (-1)^k x^{n-k} \binom{m}{k} \frac{n!}{(n-k)!}\right]$,

pro $m = \{0, 1, \dots, n\}$. To lze vypozorovat několika derivacemi výrazu $x^n e^{-x}$. Dokážeme to indukcí. $m = 0$: triv. Nechť to platí pro $m-1$, kde $m \le n$. Pak

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(x^n e^{-x}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(x^n e^{-x}\right)\right] = \frac{d}{dx}\left[(-1)^{m-1} e^{-x} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k x^{n-k} \binom{m-1}{k} \frac{n!}{(n-k)!}\right]$$

$$= (-1)^{m} e^{-x} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k x^{n-k} \binom{m-1}{k} \frac{n!}{(n-k)!} + (-1)^{m-1} e^{-x} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) \cdot x^{n-k-1}$$

$$= (-1)^{m-1} e^{-x} \cdot \left[-x^n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} x^{n-k} \binom{m-1}{k} \frac{n!}{(n-k)!} + \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^k \binom{m-1}{k} \frac{n!}{(n-k-1)!} x^{n-k-1} + (-1)^{m-1} \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}\right]$$

$$= (-1)^{m-1} e^{-x} \left[-x^n + \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^k x^{n-k-1} \frac{n!}{(n-k-1)!} \cdot \left(\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}\right) + (-1)^{m-1} \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}\right]$$

$$= (-1)^{m-1} e^{-x} \left[-x^n + \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^k x^{n-k-1} \frac{n!}{(n-k-1)!} \binom{m}{k} + (-1)^{m-1} \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}\right]$$

$$= (-1)^{m-1} e^{-x} \cdot \left[\sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+1} x^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \binom{m}{k}\right] = (-1)^m e^{-x} \left[\sum_{k=0}^{m} (-1)^k x^{n-k} \binom{m}{k} \frac{n!}{(n-k)!}\right]$$

CBD.

Použijeme tvrzeníčko pro $m = n$ a máme

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) = (-1)^n e^x \cdot (-1)^n \cdot e^{-x} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{n-k} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{n-k} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \overset{l=n-k}{=} \sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} x^l \binom{n}{n-l} \frac{n!}{l!} = (-1)^n \sum_{l=0}^{n} (-1)^l x^l \binom{n}{l} \frac{n!}{l!}$$

CBD.

Dif. rovnice: $L_n'(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} k \cdot x^{k-1}$

$$L_n''(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} k \cdot (k-1) x^{k-2}$$

$=0$ pro $k=0$ $\quad$ $=0$ pro $k=n$

$$x \cdot L_n''(x) + L_n'(x) - x L_n'(x) + n L_n(x) = (-1)^n \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} \cdot \Big[\overbrace{k \cdot (k-1) x^{k-1} + k x^{k-1}}^{k^2 x^{k-1}} \overbrace{- k x^k + n x^k}^{(n-k) x^k}\Big] = \boxed{0}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k+1} \frac{n!}{(k+1)!} (k+1)^2 x^k + (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} (n-k) x^k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \cdot \left[\frac{(n!)^2 (n-k)}{(k!)^2 (n-k)!} - \frac{(n!)^2 (k+1)^2}{(k+1)!^2 (n-k-1)!}\right]$$

3) $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

$$T_n'(x) = -\sin(n \arccos x) \cdot n \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = n \cdot \sin(n \arccos x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(T_n'(x)\sqrt{1-x^2}\right)' = \left(n \cdot \sin(n \arccos x)\right)' = n^2 \cos(n \arccos x) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)$$

4) $f(x) = \operatorname{sign}(x)$, $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x)$, kde $c_k = \int_{-1}^{1} f(x) T_k(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Tedy $c_k = \int_{-1}^{0} -T_k(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 T_k(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\quad \left| \begin{array}{l} t = \arccos x \\ dt = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{array} \right|$

$$= \int_{\pi}^{\pi/2} \cos(kt)\, dt - \int_{\pi/2}^{0} \cos(kt)\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos(kt)\, dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(kt)\, dt = \int_0^{k\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} \cos u\, du - \int_{k\frac{\pi}{2}}^{k\pi} \frac{1}{k} \cos u\, du$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \left[\sin\frac{k\pi}{2} - \sin 0 - \sin k\pi + \sin\frac{k\pi}{2}\right] = \frac{2}{k} \cdot \sin\frac{k\pi}{2} \quad \begin{array}{l} = 0 \quad \text{pro } k = 2l \\ = \frac{2}{2l+1} \cdot (-1)^l \quad \text{pro } k = 2l+1 \end{array}$$

$\Rightarrow \operatorname{sign}(x) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} (-1)^l T_{2l+1}(x)$. Protože Čebyševovy polynomy tvoří úplný systém, platí rovnost.

5) $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$

$$P_n'(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left((x^2-1)^n\right) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(n(x^2-1)^{n-1} \cdot 2x\right)$$

$$P_n''(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(2n(x^2-1)^{n-1} + n(n-1)(x^2-1)^{n-2} \cdot 4x^2\right)$$

Dle Leibnizova pravidla pro n-tou derivaci součinu pak je

$$(1-x^2)P_n''(x) = \frac{1}{2^n n!}\Bigg[\frac{d^n}{dx^n}\left(-2n(x^2-1)^n - n(n-1)4x^2(x^2-1)^{n-1}\right) + 2nx \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(2n(x^2-1)^{n-1} + n(n-1)(x^2-1)^{n-2} \cdot 4x^2\right)$$
$$+ 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(2n(x^2-1)^{n-1} + n(n-1)(x^2-1)^{n-2} \cdot 4x^2\right)\Bigg]$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(-2n(x^2-1)^n - 4n(n-1)x^2(x^2-1)^{n-1}\right) + 2nx \frac{d^n}{dx^n}\left(2nx(x^2-1)^{n-1}\right) + n(n-1)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)\right.$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(-2n(x^2-1)^n - 4n(n-1)x^2(x^2-1)^{n-1} + 4n^2x^2(x^2-1)^{n-1} + n(n-1)(x^2-1)^n\right) - 2n^2 \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(2nx(x^2-1)\right.\right.$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\underbrace{-2n(x^2-1)^n}_{B} + \underbrace{4nx^2(x^2-1)^{n-1}}_{A} + n(n-1)(x^2-1)^n - 2n^2(x^2-1)^n\right)\right]$$

Podobně $-2xP_n'(x) = \frac{1}{2^n n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(-4nx^2(x^2-1)^{n-1}\right) + 2n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(2nx(x^2-1)^{n-1}\right)\right] = \frac{1}{2^n n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\underbrace{-4nx^2(x^2-1)^{n-1}}_{-A} + \underbrace{2n(x^2-1)^n}_{-B}\right)\right]$

a proto $(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(\left(n(n-1) - 2n^2 + n(n+1)\right)(x^2-1)^n\right) = \underline{\underline{0}}$

6) $f(x) = \mathrm{sign}(x)$ $\qquad f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x)$, kde $c_k = \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x)\,dx$ (*) viz dodatek

$\boxed{c_0 = 0 \text{ zřejmě}}$ $\qquad$ 4

$\boxed{\text{VIZ TAKÉ PŘ. 9}}$

$$c_k = -\int_{-1}^{0} \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k}\left((x^2-1)^k\right) dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k}\left((x^2-1)^k\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2^k k!} \cdot \left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left((x^2-1)^k\right)\Big|_{x=-1} + \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left((x^2-1)^k\right)\Big|_{x=1} - 2\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left((x^2-1)^k\right)\Big|_{x=0} \right]$$

$$= -\frac{1}{2^{k-1} k!} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left((x^2-1)^k\right)\Big|_{x=0}$$

, protože derivace v $x = \pm 1$ jsou nulové, při derivování zůstane vždy kladná mocnina výrazu (x^2-1).

Potřebujeme odvodit vzorec pro $\frac{d^m}{dx^m}\left((x^2-1)^k\right)\Big|_{x=0}$, $m < k$. Lehce vypozorujeme, že pro lichá m je taková derivace vždy nulová. Proto také $c_k = 0$ pro sudá k. Horší je to pro sudá m.

$$(x^2-1)^k\Big|_{x=0} = (-1)^k$$

$$\left((x^2-1)^k\right)' = k \cdot (x^2-1)^{k-1} \cdot 2x \Big|_{x=0} = 0$$

$$\left((x^2-1)^k\right)'' = k \cdot (k-1) \cdot (x^2-1)^{k-2} \cdot 4x^2 + k \cdot (x^2-1)^{k-1} \cdot 2 \Big|_{x=0} = 2k \cdot (-1)^{k-1}$$

$$(\quad)''' = k \cdot (k-1)(k-2)(x^2-1)^{k-3} \cdot 8x^3 + k(k-1)(x^2-1)^{k-2} \cdot 8x + k(k-1)(x^2-1)^{k-2} \cdot 4x \Big|_{x=0} = 0$$

$$(\quad)'''' = \frac{k!}{(k-4)!}(x^2-1)^{k-4} \cdot 16x^4 + \frac{k!}{(k-3)!}(x^2-1)^{k-3} \cdot 3 \cdot 8 \cdot x^2 + \frac{k!}{(k-2)!}(x^2-1)^{k-2} \cdot \underset{12}{\cdot} + \frac{k!}{(k-3)!}(x^2-1)^{k-3} \cdot 12 \cdot 2x^2 \Big|_{x=0} = (-1)^{k-2} \cdot 12 \frac{k!}{(k-2)!}$$

kde 12 vzniklo jako $2^2 \cdot 2 + 2^2 = 2^2 \cdot (2+1)$

mocnina dvojky: kolikrát derivace padla na ~~k~~výraz (x^2-1) a vygenerovala tím $2x$

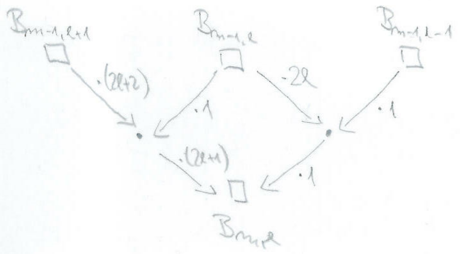
Celkem si povšimneme, že $\left((x^2-1)^k\right)^{(2m)}\Big|_{x=0} = \frac{k!}{(k-m)!} \cdot 2^m \cdot (-1)^{k-m} \cdot A(k,m)$, kde

koeficient $A(k,m)$ reprezentuje "vážený" počet různých cest k absolutnímu členu ve vyjádření $(2m)$-té derivace výrazu $(x^2-1)^k$. Speciálně nás zajímá $A(2m+1,m)$ pro $m \in \mathbb{N}$ $(k = 2m+1)$

Označme $A(2m+1,m) = B_{m,0}$ a z toho, jak fungují derivace výrazů $x^b \cdot (x^2-1)^c$ vypozorujeme následující rekurentní vztah pro čísla, které násobí výraz obsahující x^{2l} u $2m$-té derivace výrazu $(x^2-1)^k$:

$$\boxed{B_{m,l} = B_{m-1,l-1} + B_{m-1,l} \cdot (2l + 2l + 1) + B_{m-1,l+1} \cdot (2l+1)(2l+2)}$$

kde navíc $B_{0,0} = 1$, $B_{1,0} = 1$, $B_{1,1} = 1$ a obecně $B_{m,m} = 1$



Uhodnutím a následným důkazem matematickou indukcí lze ukázat $B_{m,l} = \frac{(2m-1)!!}{(2l-1)!!} \cdot \binom{m}{l}$ a speciálně tedy

$$B_{m,0} = A(2m+1,m) = (2m-1)!!$$

Nakonec tedy dostáváme $c_{2m} = 0$ a

$$c_{2m+1} = (-1)^m \frac{1}{2^m}\cdot\frac{1}{(m+1)!}\cdot(2m-1)!!\cdot\boxed{\frac{2(2m+1)+1}{2}}$$ ... vysvětleno níže

Proto $\operatorname{sign} x \sim \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}P_{2m+1}(x)$ a z úplnosti systému $P_n(x)$ plyne rovnost.

Faktor $\frac{2(2m+1)+1}{2}$: $\{P_n(x)\}$ není ~~ortogonální~~ ortonormální systém, protože v př. 9 níže ukážeme $\int_{-1}^{1} P_m^2(x)\,dx = \frac{2}{2m+1}$. Proto jsou Fourierovy koeficienty $c_k = \int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\,dx \cdot \frac{2}{2k+1}$

---

7) Cílem je vyřešit dif. rovnici $\Delta u = 0$ uvnitř koule a vně koule s danou okrajovou podmínkou na povrchu sféry o poloměru a. Koule ⇒ převod Δu do sfér. s.
To dá pro neznámou fci $u(r,\varphi,\theta)$ rovnici $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$

Symetrie: Řešení nezávisí na φ. Použijeme ansatz $u(r,\theta) = R(r)\cdot T(\theta)$ ⇒

$\frac{1}{r^2}\left(r^2R'(r)\right)'\cdot T(\theta) + \frac{R(r)}{r^2}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\, T'(\theta)\right)' = 0$. Zde čárky jsou derivace podle příslušné proměnné.

⇒ $\frac{1}{R(r)}\left(r^2R'(r)\right)' + \frac{1}{T(\theta)\sin\theta}\cdot\left(\sin\theta\, T'(\theta)\right)' = 0$. První člen je fci r a druhý člen fcí θ.

Oba v součtu dají nulu ⇒ oba členy musí být konstantní !

Rovnice pro R : $r^2R''(r) + 2rR'(r) - CR(r) = 0$ ... Eulerova rce

$r = e^t$, $S(t) = R(e^t)$ ⟶ $S''(t) + S'(t) - CS(t) = 0$, Char. polynom ⇒ $\lambda_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4C}}{2}$

Zvolme $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ a položme $C = k(k+1)$. Pak $\lambda_1 = k$, $\lambda_2 = -k-1$ a řešení je

$$R(r) = A_k r^k + B_k r^{-k-1}$$

Rovnice pro T : $\frac{1}{\sin\theta}\cdot\left(\sin\theta\, T'(\theta)\right)' = -k(k+1)T(\theta)$. Subst. $x = \cos\theta$, $U(x) = U(\cos\theta) = T(\theta)$

⇒ $T'(\theta) = U'(\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)$ ⇒ $\sin\theta\, T'(\theta) = -U'(\cos\theta)\cdot\sin^2\theta = -U'(\cos\theta)(1-\cos^2\theta)$

⇒ $\left(\sin\theta\, T'(\theta)\right)' = \left(U'(\cos\theta)(1-\cos^2\theta)\right)'\cdot\sin\theta$

⇒ $\left(U'(x)(1-x^2)\right)' = -k(k+1)U(x)$ ... Legendreova rovnice s řešením $P_k(x)$!!!

Laplaceova rce je lineární ⇒ součet řešení je také řešení ⇒ $u(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k r^k + B_k r^{-k-1}\right)P_k(\cos\theta)$

Uvnitř koule : u musí být konečné ⇒ $B_k = 0 \ \forall k$

A_k určíme z hraniční podmínky: $u(a,\theta) = V\cdot\operatorname{sign}(\cos\theta) = V\cdot\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}P_{2m+1}(\cos\theta)$

$$\overset{\|}{\sum_{k=0}^{\infty} A_k a^k P_k(\cos\theta)}$$

⇒ $A_{2m} = 0$ a $A_{2m+1} = \frac{1}{a^k}V\cdot c_{2m+1}$, kde c_{2m+1} jsou z příkladu 6)

⇒ řešení uvnitř koule : $u(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} V\cdot c_{2m+1}\cdot\left(\frac{r}{a}\right)^k P_k(\cos\theta)$

Vně koule : analogicky $A_k = 0 \ \forall k$, B_k dopočítáme a vyjde $u(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} V\cdot c_{2m+1}\cdot\left(\frac{r}{a}\right)^{-k-1} P_k(\cos\theta)$

8) $$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x)$$

Začneme z rovnice pro $P_\ell(x)$: $\left(P_\ell'(1-x^2)\right)' = -\ell(\ell+1)P_\ell$

a zderivujeme m-krát : PS : $-\ell(\ell+1)\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$

$$\text{LS}: \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left(P_\ell'(1-x^2)\right) = \frac{d^m}{dx^m}\left(P_\ell''(1-x^2) - 2xP_\ell'\right) =$$
$$= \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(P_\ell'''(1-x^2) - 4xP_\ell'' - 2P_\ell'\right) = \dots =$$
$$= \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}P_\ell\,(1-x^2) - 2\cdot(m+1)\cdot x\cdot\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_\ell - 2\cdot\frac{m(m+1)}{2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell$$

Tedy dohromady: $$\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}P_\ell(x)\cdot(1-x^2) - 2(m+1)x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_\ell(x) = \left(m(m+1)-\ell(\ell+1)\right)\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x) \qquad (1)$$

Nyní zpět k definici $P_\ell^m(x)$ a spočítáme $$\left(P_\ell^m(x)\right)' = (-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_\ell(x) + (-1)^{m+1}mx(1-x^2)^{\frac{m-2}{2}}\cdot\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$$

$$\Rightarrow \left(P_\ell^m(x)\right)'\cdot(1-x^2) = (-1)^m\cdot(1-x^2)^{\frac{m+2}{2}}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_\ell(x) + (-1)^{m+1}\cdot mx\cdot(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$$

a konečně $$\left(\left(P_\ell^m(x)\right)'\cdot(1-x^2)\right)' = (-1)^m\cdot(1-x^2)^{\frac{m+2}{2}}\cdot\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}P_\ell(x) + (-1)^{m+1}\cdot(m+2)x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_\ell(x)\cdot(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$$
$$+ (-1)^{m+1}\cdot m\cdot(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x) + (-1)^m\cdot mx\cdot mx\underbrace{\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)}_{\cdot(1-x^2)^{\frac{m-2}{2}}} + (-1)^{m+1}mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_\ell(x)$$

$$= (-1)^m\cdot(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\left[\underbrace{(1-x^2)\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}P_\ell(x) - 2(m+1)x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_\ell(x)}_{\text{použijeme }(1)} + \left(\frac{m^2x^2}{1-x^2} - m\right)\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)\right]$$

$$= \underbrace{(-1)^m\cdot(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)}_{P_\ell^m(x)}\cdot\left[\frac{m^2x^2}{1-x^2} - m + m(m+1) - \ell(\ell+1)\right] = P_\ell^m(x)\cdot\left[\frac{m^2}{1-x^2} - \ell(\ell+1)\right]$$

CBD.

Protože $P_\ell(x)$ samo o sobě obsahuje ℓ derivací výrazu $(1-x^2)^\ell$, lze výše uvedený postup aplikovat i pro záporná m, tj. pro $m \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell\}$, stačí přejít od P_ℓ k definici pomocí derivace. Pro $m<0$ je $\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$ prostě $(m+\ell)$-tá derivace $(1-x^2)^\ell$.

(a) Zavedeme $B(a,b) = \int_0^1 t^a \cdot (1-t)^b \, dt$.

Zřejmě $B(a,0) = \frac{1}{a+1}$. Dále pomocí per partes $B(a,b) = \frac{b}{a+1} \cdot B(a+1, b-1)$

Použijeme b-krát tohoto rekurentního vzorce: $B(a,b) = \frac{b \cdot (b-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(a+1)\cdot(a+2)\cdot \ldots \cdot a+b} \cdot B(a+b, 0)$

$$= \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$$

Substituce $x = 2t-1$ vede na $B(a,b) = \int_{-1}^{1} \left(\frac{x+1}{2}\right)^a \cdot \left(\frac{1-x}{2}\right)^b \cdot \frac{1}{2} dx$

Proto $B(m,m) = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^m}{2^{2m+1}} dx$ a odtud $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^m dx = 2^{2m+1} \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}$

Spočítáme $\int_{-1}^{1} P_k(x) P_l(x) = \frac{1}{2^{k+l} k!\, l!} \int_{-1}^{1} \frac{d^k}{dx^k}\left((x^2-1)^k\right) \frac{d^l}{dx^l}\left((x^2-1)^l\right) dx$

BÚNO $l \geq k$ a nechť $l > k$. Použijeme l-krát per partes. Hraniční členy vždy zmizí, protože $\frac{d^m}{dx^m}\left((x^2-1)^l\right)\Big|_{x=\pm 1} = 0$ pro $m < l$.

Proto $\int_{-1}^{1} P_k(x) P_l(x) = \frac{1}{2^{k+l} k!\, l!} (-1)^l \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^{k+l}}{dx^{k+l}}\left((x^2-1)^k\right)\right] \cdot (x^2-1)^l \, dx$. Proto je tato derivace $(x^2-1)^k$ je polynom stupně $2k$, ten je derivován $(k+l)$-krát a $k+l > 2k$. nulová a výsledek je 0! Legendreovy polynomy jsou proto ortogonální!

Pro $l = k$ je $\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\left((x^2-1)^k\right) = (2k)!$ a $\int_{-1}^{1} (P_k(x))^2 dx = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} \cdot (2k)! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^k dx =$

$= \frac{2k!}{2^{2k}(k!)^2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^k dx = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot 2^{2k+1} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2}{2k+1}$, což jsme použili v př. 6!

Nyní $\int_{-1}^{1} P_k^m(x) P_l^m(x) dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^m \cdot \frac{d^m}{dx^m} P_k(x) \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \, dx = \frac{1}{2^{k+l} k!\, l!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^m \frac{d^{k+m}}{dx^{k+m}}\left((x^2-1)^k\right) \cdot \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left((x^2-1)^l\right) dx$

Nechť nejprve $l > k$. Ozn. $g(x) = (1-x^2)^m \frac{d^{k+m}}{dx^{k+m}}\left((x^2-1)^k\right)$ a $h(x) = \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left((x^2-1)^l\right)$

g je polynom stupně $k+m$, h polynom stupně $l-m$. Přesuneme per partes derivace z h na g. Okrajové členy opět zmizí, i když zde je to trošku složitější na rozmyšlení – přesuneme nejprve m derivací, zde pomáhá $g(x)$, aby okrajové členy zmizely, potom zbylých l derivací, zde to zařídí $h(x)$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} P_k^m(x) P_l^m(x) \, dx = 0$ pro $l > k$, protože $\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} g(x) = 0$, protože $l > k$.

Nakonec nechť $k = l$.

$$\int_{-1}^{1} P_k^m(x) P_k^m(x)\, dx = \frac{(-1)^{k+m}}{2^{2k}(k!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^k \cdot \underbrace{\frac{d^{k+m}}{dx^{k+m}}\left[(1-x^2)^m \cdot \frac{d^{k+m}}{dx^{k+m}}\left((x^2-1)^k\right)\right]}_{A} dx$$

A je absolutní člen a platí $A = (-1)^m \cdot \frac{d^{k+m}}{dx^{k+m}}\left(x^{2m} \frac{d^{k+m}}{dx^{k+m}}(x^{2k})\right)$, protože rozhodují nejvyšší mocniny x. $\frac{d^{k+m}}{dx^{k+m}}(x^{2k}) = \frac{(2k)!}{(k-m)!} x^{k-m}$ a $\frac{d^{k+m}}{dx^{k+m}}\left(\frac{(2k)!}{(k-m)!} x^{k+m}\right) = \frac{2k!}{(k-m)!}(k+m)!$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} P_k^m(x) P_k^m(x)\, dx = \frac{(-1)^{k+m}}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{(-1)^m \cdot (2k)! \cdot (k+m)!}{(k-m)!} \cdot (-1)^k \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)^k\, dx =$$

$$= \frac{(2k)!\,(k+m)!}{2^{2k}(k!)^2 (k-m)!} \cdot 2^{2k+1} \cdot \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2}{2k+1} \cdot \frac{(k+m)!}{(k-m)!}$$

(10) $Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$

Je-li $m \neq n$, pak $Y_{lm}(\theta,\varphi) \cdot \overline{Y_{kn}}(\theta,\varphi)$ obsahuje člen $e^{im\varphi} \cdot e^{-in\varphi} = e^{i(m-n)\varphi}$

$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\varphi}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos(m-n)\varphi + i\sin(m-n)\varphi\, d\varphi = 0$. Nenulový výsledek může vyjít jen pro $m = n$, kdy $e^{im\varphi} \cdot e^{-im\varphi} = 1$ a $\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi$. Dále tedy $m = n$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, Y_{lm}(\theta,\varphi) \cdot \overline{Y_{km}}(\theta,\varphi)\, d\theta\, d\varphi = \left(2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta\, P_l^m(\cos\theta) P_k^m(\cos\theta)\, d\theta\right) \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot \sqrt{\dots}$$

Substitucí $t = \cos\theta$, $dt = -\sin\theta\, d\theta$ převedeme integrál na $\int_{-1}^{1} P_l^m(t)\, P_k^m(t)\, dt$.

Ten je nulový pro $k \neq l$ viz př. 9, a pro $k = l$ dostáváme dle př. 9,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, Y_{lm}(\theta,\varphi) \overline{Y_{lm}}(\theta,\varphi)\, d\theta\, d\varphi = 2\pi \cdot \frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \cdot \frac{2}{2l+1} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!} = 1$$

CBD.