

Zápočtový test č. 1 - 3. 11. (35 minut)

1. [4 body] Najděte extrémy funkcionálu

$$\int_0^2 y + 5xy' + (y')^2 dx$$

na množině

$$M = \{y \in C^1([0, 2]), y(0) = 1, y(2) = 1\}.$$

2. [5 bodů] Necht' $p \in \mathbb{R}$. Najděte, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada funkcí $f_n(x)$ a rozhodněte o stejnoměrné či lokálně stejnoměrné konvergenci této řady na nalezených intervalech

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^p}.$$

Řešení

1. Vnitřek funkcionálu nám dává funkci $f(x, y, z) = y + 5xz + z^2$. Lehce zjistíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 \neq 0$$

a máme proto zaručenou regularitu minimizéru. Euler-Lagrangeova rovnice pro daný funkcionál je

$$1 - \frac{d}{dx}(5x + 2y') = 0$$

a tedy lehce

$$y'' = -2$$

$$y' = -2x + A$$

$$y = -x^2 + Ax + B.$$

Konstanty A, B dopočítáme z okrajových podmínek.

$$y(0) = 1 \Rightarrow B = 1$$

$$y(2) = 1 \Rightarrow A = 2$$

Celkem tedy nacházíme stacionární bod $y = -x^2 + 2x + 1$. Protože funkcionál závisí na y tak, že všechny druhé derivace obsahující y zmizí, je příslušná matice druhých derivací

$$D^2 \tilde{f}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

je tedy pozitivně semidefinitní, proto je funkcionál konvexní a proto je nalezený stacionární bod minimem funkcionálu.

- Podíváme se nejprve na nutnou podmínku stejnoměrné konvergence řady. Pro $p > 0$ máme

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n^p} \rightarrow 0$$

bodově pro každé pevné reálné x , protože čitatel jde buď do nuly nebo je konstantní jednička (v bodě $x = 0$), zatímco jmenovatel jde do nekonečna. Pro $p = 0$ máme $f_n(x) \rightarrow 0$ všude mimo $x = 0$, v počátku máme posloupnost samých jedniček, která očividně nekonverguje k nule. Konečně pro $p < 0$ dostáváme očividně $f_n(0) \rightarrow \infty$ a $f_n(x) \rightarrow 0$ pro $x \neq 0$, což plyne ze škálovací limity, protože $(e^{-x^2})^n$ jde do nuly rychleji než libovolná mocnina n do nekonečna.

Pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti f_n k nule hledáme $\sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x)$ pro pevné n . Buď přímo uhodneme, že supremum $f_n(x)$ se nabývá vždy v nule bez ohledu na n a nebo si to spočítáme pomocí derivace

$$f'_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n^2} \cdot (-2nx) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Proto $\sigma_n = \frac{1}{n^p}$. To jde k nule pro $p > 0$. Pro $p > 1$ dokonce nejen to, jde to k nule tak rychle, že příslušná řada $\sum \frac{1}{n^p}$ konverguje, a proto můžeme použít Weierstrassovo kritérium, omezit $f_n(x) \leq \frac{1}{n^p}$ a usoudit, že **pro $p > 1$ zadaná řada konverguje stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$.**

Pro $p \leq 1$ lehce vidíme, že v bodě $x = 0$ dostáváme divergující řadu $\sum n^{-p}$. Nicméně pro libovolné $\delta \neq 0$ řada $\sum f_n(\delta)$ konverguje, například odmocninovým kritériem, které povede k limitní hodnotě $q = e^{-\delta^2} < 1$. Vidíme, že $x = 0$ je jediný problematický bod, supremum funkcí $f_n(x)$ se na intervalech $(-\infty, -\delta]$ a $[\delta, \infty)$ nabývá v krajních bodech $\pm\delta$ a tam řada konverguje, což jsme právě ukázali. **Pro $p \leq 1$ tak**

řada konverguje jen lokálně stejnoměrně na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
Nemůže konvergovat stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$, protože v nule
nekonverguje vůbec.