

Písemka č. 2 - 15. 12. (40 minut)

1. [4,5 bodu] Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{R}$ konverguje integrál $I(a)$ a spočtěte jej.

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 + a^2 x^2)}{x^2} dx.$$

2. [4,5 bodu] Spočtěte

$$\int_c y \, ds,$$

kde c je část křivky, která vznikne jako průnik ploch

$$z = \sqrt{2x}$$

a

$$x^2 + y^2 = 2x,$$

ležící v oktantu $x, y, z \geq 0$.

Řešení

1. Nejprve zjistíme, kde integrál konverguje. Protože u nuly platí $\ln(1 + a^2 x^2) \sim a^2 x^2$, vidíme, že limita $f(a, x)$ pro $x \rightarrow 0-$ je a^2 . Dále $f(a, 1) = \ln(1 + a^2)$, takže v žádném z krajních bodů nemáme problém, uvnitř intervalu $(0, 1)$ je funkce spojitá, a proto integrál konverguje pro všechna $a \in \mathbb{R}$.

Samotný integrál lze spočítat i přímo metodou per partes, ale my si místo toho spočítáme derivaci (předpoklady věty ověříme na závěr).

$$I'(a) = \int_0^1 \frac{2a}{1 + a^2 x^2} dx = 2 \int_0^a \frac{dy}{1 + y^2} = 2 \operatorname{arctg} a.$$

Zbývá tento výraz zpět zintegrovat.

$$\begin{aligned} I(a) &= I(0) + \int_0^a 2 \operatorname{arctg} b \, db = 0 + 2 \int_0^a \operatorname{arctg} b \, db = |\text{per partes}| \\ &= 2 [b \operatorname{arctg} b]_0^a - 2 \int_0^a \frac{b}{1 + b^2} db = 2a \operatorname{arctg} a - \ln(1 + a^2). \end{aligned}$$

Výsledek platí pro všechna reálná a , využili jsme lehké pozorování, že $I(0) = 0$, protože v takovém případě integrujeme nulu.

Zbývá ověřit předpoklady věty o derivaci, to je ale snadné, měřitelnost v proměnné x plyne ze spojitosti, existence derivace funkce $f(a, x)$ podle a je zřejmá, protože jsme tu derivaci spočítali. Dále $f(0, x) \in L^1(0, 1)$, to jsme ostatně také už využili. Zbývá najít majorantu pro derivace, ale zde si snadno uvědomíme, že

$$\left| \frac{\partial f(a, x)}{\partial a} \right| = \left| \frac{2a}{1 + a^2 x^2} \right| \leq |2a_0|$$

pro všechna $a \in (-a_0, a_0)$, kde $a_0 > 0$ je libovolné. Konstanta $2a_0$ je samozřejmě integrovatelná funkce na intervalu $(0, 1)$. Výsledek je tedy platný pro všechny hodnoty parametru $a \in (-a_0, a_0)$ s libovolným a_0 a tedy pro všechna $a \in \mathbb{R}$.

2. Z definice křivkového integrálu plyne, že musíme najít parametrizaci křivky c a spočítat $\|c'(t)\|$. Povšimneme si, že $x^2 + y^2 = 2x$ je válcová plocha, hodí se nám tak zavést válcové souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \\ z &= z. \end{aligned}$$

Rovnice válcové plochy nám okamžitě dá

$$r^2 = 2r \cos t$$

a tedy

$$r = 2 \cos t.$$

Protože $r > 0$, vidíme, že válcová plocha protíná rovinu $z = 0$ jen ve čtvrtém a prvním kvadrantu, tedy tam, kde je $x > 0$ a kde $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Nás ale zajímá jen ta část válcové plochy, která splňuje navíc $y > 0$ a tedy $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Průnik této části válcové plochy s plochou $z = \sqrt{2x}$ tak parametricky lehce popíšeme jako

$$\begin{aligned} x &= r \cos t = 2 \cos^2 t \\ y &= r \sin t = 2 \cos t \sin t \\ z &= \sqrt{2x} = 2 \cos t. \end{aligned}$$

pro $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Pro spočítání zadaného integrálu budeme potřebovat derivace těchto rovnic podle t . Proto

$$\begin{aligned}x' &= -4 \cos t \sin t = -2 \sin 2t \\y' &= 2 \cos 2t \\z' &= -2 \sin t.\end{aligned}$$

a odtud

$$\begin{aligned}\|c'(t)\| &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{4 \sin^2 2t + 4 \cos^2 2t + 4 \sin^2 t} \\&= 2\sqrt{1 + \sin^2 t}\end{aligned}$$

Nyní jsme připraveni přepsat křivkový integrál z definice na standardní jednorozměrný Lebesgueův integrál. Máme

$$\begin{aligned}\int_c y \, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \sin t \cdot 2\sqrt{1 + \sin^2 t} \, dt \\&= \int_{b=1}^{b=\sqrt{2}} \sqrt{b} \, db = \frac{2}{3} [b^{\frac{3}{2}}]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} (\sqrt{8} - 1).\end{aligned}$$