

Domácí úkol č. 1

Zadáno: 19. 2.

Deadline: 26. 2.

Rozložte funkci $f(x)$ ve Fourierovu řadu na intervalu periody funkce $f(x)$ a vyšetřete konvergenci této řady

$$f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|.$$

Hint 1: Pro určení jednoho z Fourierových koeficientů se vám může hodit postup řešení příkladu 17 ze série příkladů na integrály závislé na parametru z minulého semestru.

Hint 2: Pro určení zbylých koeficientů se po přirozené operaci pokuste dokázat, že vzniklé integrály z jisté racionální funkce goniometrických funkcí mají stejnou hodnotu nezávislou na k .

Řešení

Nejprve určíme periodu, protože $|\sin y|$ je π -periodická funkce, $f(x)$ je 2π -periodická funkce, rozvedeme ji do řady na $(0, 2\pi)$, což se hodí proto, že tam nemá žádnou singularitu (na rozdíl od intervalu $(-\pi, \pi)$). Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin y dy = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin y dy.$$

Tento integrál jsme řešili ve zmíněném příkladu 17 v Hintu 1. Použitím tehdejšího postupu či výsledku dostaneme

$$a_0 = -2 \ln 2.$$

Dále si povšimneme, že $f(x)$ je sudá funkce a proto $b_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Zbývá tak spočítat

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\sin \frac{x}{2} \right) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(\sin y) \cos(2ky) dy = | \text{ per pertes } | \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\ln(\sin y) \frac{\sin 2ky}{2k} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos y \sin(2ky)}{\sin y} dy \end{aligned}$$

Hranatá závorka má nulovou hodnotu, protože ze škálovací limity $\sin(2ky)$ vždy porazí $\ln \sin x$ (nahlédneme například Taylorovým rozvojem). Dále budeme zkoumat integrál a budeme manipulovat se součtovými vzorci, přičemž se ukáže užitečnost Hintu 2. Nechť $k > 1$, pak:

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^\pi \frac{\cos y \sin(2ky)}{\sin y} dy = \int_0^\pi \frac{\cos^2 y \sin((2k-1)y)}{\sin y} + \cos y \cos((2k-1)y) dy \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin((2k-1)y)}{\sin y} - \sin y \sin((2k-1)y) + \cos y \cos((2k-1)y) dy \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin((2k-1)y)}{\sin y} + \cos(2ky) dy = \int_0^\pi \frac{\sin((2k-1)y)}{\sin y} dy \\ &= \int_0^\pi \cos((2k-2)y) + \frac{\cos y \sin((2k-2)y)}{\sin y} dy = I_{k-1} \end{aligned}$$

Vidíme, že hodnota integrálu nezávisí na k . Stačí tak spočítat integrál I_1 .

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\cos y \sin 2y}{\sin y} dy = 2 \int_0^\pi \cos^2 y dy = \pi,$$

a proto $I_k = \pi$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Díky tomu máme

$$a_k = -\frac{1}{k}$$

a konečně

$$\ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| = -\ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}.$$

Vzniklá řada konverguje bodově a lokálně stejnoměrně na $(0, 2\pi)$ podle věty o konvergenci Fourierových řad, v krajních bodech nekonverguje, protože tam vzniká harmonická řada.