

Domáci úkol č. 2

Zadáno: 26. 2.

Deadline: 5. 3.

Pomocí rozkladu do trigonometrických řad vyřešte následující parciální diferenciální rovnici

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 && \text{na } (0, T) \times (0, l) \\ u(0, x) &= 0 && \text{na } (0, l) \\ u_t(0, x) &= \cosh x && \text{na } (0, l) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, l) &= 0 && \text{na } (0, T)\end{aligned}$$

Řešení

Standardní metodou hledáme řešení ve tvaru $u(t, x) = T(t)X(x)$. To vede na dvě obyčejné diferenciální rovnice, jednu pro $X(x)$ a druhou pro $T(t)$. Rovnice pro $X(x)$ je

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{na } (0, l),$$

kterou podle zadání doplníme okrajovými podmínkami

$$X'(0) = X'(l) = 0.$$

Tato rovnice nemá řešení pro $\lambda > 0$ a má řešení $X(x) = A_0 = \text{const}$ pro volbu $\lambda = 0$. Příklad $\lambda < 0$ vede na obecné řešení

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{-\lambda}x.$$

Odtud

$$X'(x) = -C_1 \sqrt{-\lambda} \sin \sqrt{-\lambda}x + C_2 \sqrt{-\lambda} \cos \sqrt{-\lambda}x.$$

Podmínka $X'(0) = 0$ okamžitě vede k $C_2 = 0$, načež podmínka $X'(l) = 0$ vede k

$$C_1 \sqrt{-\lambda} \sin \sqrt{-\lambda}l = 0.$$

Abychom dostali netriviální řešení, musí být

$$\sqrt{-\lambda}l = k\pi,$$

což vede k tomu, že musíme uvažovat pouze volby

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2} \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}.$$

Tím dostáváme řešení

$$X_k(x) = A_k \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

kde umožněním volby $k = 0$ zahrneme také konstantní řešení. Dále vyřešíme rovnici pro $T(t)$. Máme

$$T''(t) = -\frac{k^2\pi^2 c^2}{l^2} T(t),$$

což vede pro $k \in \mathbb{N}$ k obecnému řešení

$$T_k(t) = B_k \cos \frac{k\pi ct}{l} + C_k \sin \frac{k\pi ct}{l}.$$

Musíme však ještě zvlášť uvažovat $k = 0$, což je v našem případě také přípustná hodnota. V tomto případě je

$$T_0(t) = B_0 + C_0 t.$$

Využijeme linearity rovnice, posčítáme nalezená řešení přes všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a dostaneme

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0 t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi ct}{l} + b_k \sin \frac{k\pi ct}{l} \right) \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Zbývá dopočítat koeficienty a_k, b_k z počátečních podmínek úlohy. Podmínka $u(0, x) = 0$ dává

$$0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l},$$

odkud okamžitě $a_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Konečně podmínka $u_t(0, x) = \cosh x$ dává

$$\cosh x = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\pi c}{l} \cos \frac{k\pi x}{l},$$

potřebujeme rozvést tedy funkci $\cosh x$ do cosinové řady na $(0, l)$, protože je funkce $\cosh x$ sudá, cosinová řada je přímo Fourierovou řadou této funkce na $(-l, l)$. Označíme Fourierovy koeficienty funkce $\cosh x$ jako $\tilde{a}_k$ a jdeme integrovat.

$$\tilde{a}_0 = \frac{2}{l} \int_0^l \cosh x \, dx = \frac{2 \sinh l}{l}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \cosh x \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx = |\text{per partes}| \\ &= \frac{2}{l} \left(\left[\frac{l}{k\pi} \cosh x \sin \frac{k\pi x}{l} \right]_0^l - \frac{l}{k\pi} \int_0^l \sinh x \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx \right) \\ &= -\frac{2}{k\pi} \int_0^l \sinh x \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx = |\text{per partes}| \\ &= -\frac{2}{k\pi} \left(\left[-\frac{l}{k\pi} \sinh x \cos \frac{k\pi x}{l} \right]_0^l + \frac{l}{k\pi} \int_0^l \cosh x \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx \right) \\ &= \frac{2l(-1)^k \sinh l}{k^2 \pi^2} - \frac{2l}{k^2 \pi^2} \frac{l}{2} \tilde{a}_k. \end{aligned}$$

Odtud už jednoduše

$$\tilde{a}_k = \frac{2l \sinh l (-1)^k}{k^2 \pi^2 + l^2}.$$

Dostáváme tak $b_0 = \tilde{a}_0$ a

$$b_k \frac{k\pi c}{l} = \frac{2l \sinh l (-1)^k}{k^2 \pi^2 + l^2}$$

odkud

$$b_k = \frac{2(-1)^k l^2 \sinh l}{k\pi c (k^2 \pi^2 + l^2)}.$$

Hledané řešení tak je ve tvary řady

$$u(t, x) = \sinh l \left(\frac{t}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k l^2}{k\pi c (k^2 \pi^2 + l^2)} \sin \frac{k\pi ct}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} \right).$$