

Domáci úkol č. 3

Zadáno: 5. 3.

Deadline: 12. 3.

Nalezněte holomorfní funkci (na příslušné oblasti) $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, je-li

$$v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y.$$

Řešení

Využijeme Cauchy-Riemannovy podmínky. Máme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2$$

a odtud

$$u(x, y) = \int \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2 \, dx = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - 2x + C_1(y).$$

Podobně

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2x}{x^2 + y^2} - 1$$

a odtud

$$u(x, y) = -\int \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1 \, dy = -2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y + C_2(x).$$

Nyní zbývá si uvědomit, že platí $\operatorname{arctg} \frac{1}{A} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(A)$ pro $A > 0$ a $\operatorname{arctg} \frac{1}{A} = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(A)$ pro $A < 0$. V obou případech se tak $\operatorname{arctg} \frac{1}{A}$ liší od $-\operatorname{arctg} A$ jen o konstantu, kterou stejně ve výsledku budeme mít libovolnou.

Proto

$$u(x, y) = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - 2x - y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Spojíme-li u a v dohromady dostáváme

$$f(z) = u + iv = -2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + i \ln(x^2 + y^2) - 2z + iz + C = 2i \ln z - (2 - i)z + C,$$

$C \in \mathbb{R}$.