Domácí úkol č. 4

Zadáno: 19. 3.
Deadline: 26. 3.

Spočítejte

$$I = \int_\varphi \ln z \, \mathrm{d}z,$$

kde φ je kladně obíhaná kružnice se středem v počátku, poloměrem R a platí $\ln 1 = 2\pi \mathrm{i}$ (hodnoty $\ln z$ se na křivce mění spojitě).

Řešení

Kružnici parametrizujeme $\varphi(t) = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pro $t \in (0, 2\pi)$. Protože

$$\ln(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) = \ln r + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\alpha$$

a pro $r = 1$, $\alpha = 0$ máme dostat výsledek $2\pi\mathrm{i}$, je jasné, že musíme uvažovat větev logaritmu, která nám pro parametrizaci naší kružnice bude dávat

$$\ln(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \ln R + \mathrm{i}(2\pi + t)$$

pro $t \in (0, 2\pi)$. Nyní už stačí jen vše dosadit, použít definici křivkového integrálu a dopočítat výsledek.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} (\ln R + \mathrm{i}(2\pi + t))\mathrm{i}R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\
&= (\mathrm{i}R\ln R - 2\pi R)\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{i}}\right]_0^{2\pi} - R\left[t\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{i}}\right]_0^{2\pi} + R\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi R\mathrm{i}
\end{aligned}$$