Domácí úkol č. 5

Zadáno: 26. 3.
Deadline: 2. 4.

Rozviňte do Laurentovy řady na množině $1 < |z| < 2$ funkci

$$f(z) = \frac{z}{(z+\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})^2}.$$

Řešení

Nejprve rozložíme funkci na parciální zlomky.

$$f(z) = \frac{A}{z+\mathrm{i}} + \frac{B}{z+2\mathrm{i}} + \frac{C}{(z+2\mathrm{i})^2},$$

kde $A = \mathrm{i}$ a $C = 2$ dopočítáme lehce zakrývací metodou a $B = -\mathrm{i}$ musíme najít roznásobením. Nyní každou ze třech vzniklých funkcí rozložíme do Laurentovy řady na dané množině samostatně. Nejprve tedy $f_1(z) = \frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$. Protože jsme na $|z| > 1 = |\mathrm{i}|$, musíme rozkládat takto:

$$f_1(z) = \frac{\mathrm{i}}{z}\frac{1}{1+\frac{\mathrm{i}}{z}} = \frac{\mathrm{i}}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{i}^n}{z^n}.$$

Pokračujeme s funkcí $f_2(z) = -\frac{\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}$, tentokrát jsme na $|z| < 2 = |2\mathrm{i}|$ a proto

$$f_2(z) = -\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\frac{1}{1+\frac{z}{2\mathrm{i}}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2\mathrm{i}}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z\mathrm{i})^n}{2^{n+1}}.$$

Pro rozložení třetí funkce $f_3(z) = \frac{2}{(z+2\mathrm{i})^2}$ musíme použít větu o derivování řady člen po členu a máme

$$f_3(z) = -2\left(\frac{1}{z+2\mathrm{i}}\right)' = \frac{-2}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{z}{2\mathrm{i}}\right)^n\right)' = \mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\mathrm{i}(z\mathrm{i})^{n-1}}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(z\mathrm{i})^n}{2^{n+1}}.$$

Nakonec vše sečteme a máme požadovaný výsledek

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{i}^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(z\mathrm{i})^n}{2^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}(z\mathrm{i})^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(z\mathrm{i})^n}{2^{n+1}}.$$