Domácí úkol č. 6

Zadáno: 2. 4.
Deadline: 9. 4.

Pomocí reziduové věty spočítejte integrál

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení

Ze sudosti integrované funkce lehce zjistíme, že

$$2I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

Integrovanou funkci rozšíříme na komplexní funkci $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$. Ta má čtyři jednonásobné póly v bodech

$$z_k = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}+\frac{k\mathrm{i}\pi}{2}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

a můžeme psát

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}.$$

Budeme integrovat tuto funkci přes horní půlkružnici o poloměru R. Tato křivka se skládá ze dvou částí. Její "rovná" část $\varphi_1(t) = t$, $t \in [-R, R]$ dá

$$\int_{-R}^{R} f(z)\,\mathrm{d}z \to 2I, \qquad R \to \infty.$$

Vlastnosti integrálu přes půlkružnici $\varphi_2(t) = R\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, \pi]$ zjistíme použitím Jordanova lemmatu, konkrétně jeho verze s $\alpha = 0$. Máme totiž $M_R \sim \frac{1}{R^2}$, proto $RM_R \sim \frac{1}{R} \to 0$ a tedy

$$\int_{\varphi_2} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0, \qquad R \to \infty.$$

Uvnitř integrační křivky leží dva ze čtyř pólů funkce $f(z)$, proto použitím reziduové věty dostáváme

$$\begin{aligned} 2I + 0 &= 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}_{z_0} f + \mathrm{Res}_{z_1} f) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})(\sqrt{2}\mathrm{i})} + \frac{-\mathrm{i}+1}{(-\sqrt{2})\sqrt{2}\mathrm{i}(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})}\right) \\ &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}(\frac{1}{\mathrm{i}} + \frac{1}{\mathrm{i}}) = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

a odtud $I = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.