Domácí úkol č. 7

Zadáno: 9. 4.
Deadline: 16. 4.

Pomocí reziduové věty spočítejte integrál

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos^4 t}{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Řešení

Integrál není přes interval $(0, 2\pi)$, což bychom chtěli, zato se v něm ale vyskytují sudé mocniny goniometrických funkcí. To nás vede k myšlence, že tyto mocniny vyjádříme pomocí dvojnásobného argumentu. Máme

$$\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}, \qquad \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

a odtud po krátké přímočaré úpravě

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\cos 2t+1)^2}{6-2\cos 2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{(\cos s+1)^2}{(3-\cos s)}\,\mathrm{d}s.$$

Nyní zavedeme substituci $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$, $\mathrm{d}z = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}s$ a převedeme I na integrál přes jednotkovou kružnici, kterou si pro jednoduchost označíme jako K.

$$I = \frac{1}{4\mathrm{i}}\int_K \frac{(\frac{z+z^{-1}}{2}+1)^2}{3-\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{1}{8\mathrm{i}}\int_K \frac{z^4+4z^3+6z^2+4z+1}{z^2(z^2-6z+1)}\,\mathrm{d}z.$$

Nalezená funkce $f(z)$ má uvnitř K dvojnásobný pól v nule a jednonásobný pól v bodě $z_1 = 3-2\sqrt{2}$. Další pól $z_2 = 3+2\sqrt{2}$ pak leží vně K. Použitím reziduové věty máme

$$I = -\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{Res}_0 f + \mathrm{Res}_{z_1} f\right),$$

kde

$$\mathrm{Res}_0 f = \left(\frac{z^4+4z^3+6z^2+4z+1}{z^2-6z+1}\right)'\Big|_{z=0} = ... = 10$$

a

$$\mathrm{Res}_{z_1} f = \frac{z_1^4+4z_1^3+6z_1^2+4z_1+1}{z_1^2(z_1-z_2)} = ... = -8\sqrt{2}.$$

Celkem tak $I = \frac{\pi}{2}(4\sqrt{2}-5)$.