Domácí úkol č. 8

Zadáno: 16. 4.
Deadline: 23. 4.

Pomocí reziduové věty spočítejte integrál

$$I = \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1} \, \mathrm{d}x,$$

kde $-1 < p < 2$.

Řešení

Zavedeme substituci $y = \frac{x}{1-x}$. Tou integrál převedeme na

$$I = \int_0^\infty y^{1-p} \frac{1}{1+y} \frac{(1+y)^2}{2y^2+2y+1} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2} = \int_0^\infty \frac{y^{1-p}\,\mathrm{d}y}{(y+1)(2y^2+2y+1)}$$

Funkci rozšíříme do komplexní roviny a označíme jako $f(z) = \frac{z^{1-p}}{(z+1)(2z^2+2z+1)}$. Tato funkce má tři jednonásobné póly, jeden v bodě $z_0 = -1$ a další v bodech $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}$. Integrovat budeme přes "Pacmana", tedy

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}, \qquad t \in [\varepsilon, R] \\
\varphi_2(t) &= R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad t \in [\eta, 2\pi - \eta] \\
\varphi_3(t) &= t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-\eta)}, \qquad t \in [R, \varepsilon] \\
\varphi_4(t) &= \varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad t \in [2\pi - \eta, \eta].
\end{aligned}$$

Není těžké nahlédnout, že $\int_{\varphi_1} f \to I$ pro $\varepsilon, \eta \to 0$ a $R \to \infty$. Integrál přes φ_2 vyřešíme Jordanovým lemmatem, kde $\alpha = 0$ a $M_R \sim R^{-p-2}$, tedy $RM_R \sim R^{-p-1} \to 0$ pro $-p-1 < 0$, tedy $p > -1$. Proto

$$\int_{\varphi_2} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0.$$

Pro integrál přes φ_3 platí pro $\eta \to 0$

$$\int_{\varphi_3} f(z)\,\mathrm{d}z \to \int_R^\varepsilon \frac{t^{1-p}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(1-p)}}{(t+1)(2t^2+2t+1)}\,\mathrm{d}t$$

a dále pak pro $\varepsilon \to 0$ a $R \to \infty$ je

$$\int_{\varphi_3} f(z)\,\mathrm{d}z \to -\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(1-p)} I = -\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}p} I$$

Konečně při počítání integrálu přes φ_4 použijeme definici křivkového integrálu a fakt, že funkce $\frac{1}{(z+1)(2z^2+2z+1)}$ je na okolí počátku omezená konstantou C a najdeme

$$\left|\int_{\varphi_4} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_0^{2\pi} C\varepsilon\varepsilon^{1-p}\,\mathrm{d}t \le C\varepsilon^{2-p} \to 0$$

pro $\varepsilon \to 0$, protože $p < 2$. Nyní použijeme reziduovou větu a dostaneme

$$I(1-\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}p}) = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}_{z_0} f + \mathrm{Res}_{z_1} f + \mathrm{Res}_{z_2} f),$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z_0} f &= -\,\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}p},\\
\mathrm{Res}_{z_1} f &= 2^{p-1}\frac{(\mathrm{i}-1)^{1-p}}{(\mathrm{i}-1)} = 2^{\frac{p}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}p\frac{3}{4}}\\
\mathrm{Res}_{z_2} f &= -2^{p-1}\frac{(-\mathrm{i}-1)^{1-p}}{\mathrm{i}+1} = 2^{\frac{p}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}p\frac{5}{4}}
\end{aligned}$$

Odtud

$$I = \frac{\pi}{\sin \pi p}\left(-1 + 2^{\frac{p}{2}}\cos\left(\frac{\pi p}{4}\right)\right).$$

To vše projde jen pro $p \ne 0, 1$. Pro tyto speciální hodnoty musíme integrál spočítat standardními metodami (nebo reziduovou větou s jinou cestou). Pro $p = 0$ je

$$I = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

Pro $p = 1$ je

$$I = \int_0^1 \frac{(1-x)\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = [\operatorname{arctg} x]_0^1 - \frac{\ln 2}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$