Domácí úkol č. 9

Zadáno: 30. 4.
Deadline: 7. 5.

Zjistěte, v jakém prostoru funkcí ($\mathcal{S}, L^1$, nebo L^2) se nachází, a najděte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2},$$

kde $a > 0$.

Řešení

Nejprve je vhodné si uvědomit, že $f \notin \mathcal{S}$ a $f \notin L^1$. Platí ale $f \in L^2$, takže pořád můžeme počítat Fourierovu transformaci jako limitu z integrálů pro $R \to \infty$. Takže náš cíl je spočítat

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2 + a^2} \, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi} \, \mathrm{d}x.$$

Uvědomíme si lehce, že $\mathcal{F}(f)(0) = \lim_{R\to\infty} 0 = 0$, protože integrujeme lichou funkci. Dále se vyloženě nabízí postupovat reziduovou větou s využitím Jordanova lemmatu. Protože ale v něm bude $\alpha = -2\pi\xi \neq 0$, integrační cesta bude záviset na znaménku ξ. Zadaná funkce je lichá, takže stačí spočítat Fourierovu transformaci pro $\xi < 0$ a pak výsledek prodloužíme liše. Integrační cestu zvolíme jako půlkružnici v horní polorovině o poloměru R. Bude mít dva kusy, průměr půlkružnice je integrál, který nás zajímá. Integrál přes samotnou půlkružnici půjde k nule díky Jordanově lemmatu, protože $\alpha > 0$ a $M_R \sim \frac{1}{R} \to 0$. Proto

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2 + a^2} \, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi} \, \mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}_{a\mathrm{i}} \frac{z}{z^2 + a^2} = 2\pi \mathrm{i} \frac{a\mathrm{i} \, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi \mathrm{i} a}}{2a\mathrm{i}} = \pi \mathrm{i} \, \mathrm{e}^{2\pi\xi a}$$

Funkci prodloužíme liše a dostaneme

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = -\pi \mathrm{i} \operatorname{sgn}(\xi) \, \mathrm{e}^{-2\pi a|\xi|}.$$