

Domácí úkol č. 10

Zadáno: 7. 5.

Deadline: 14. 5.

Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, je-li

$$T = e^{-a|x|^2} \Delta \delta_0,$$

kde $a > 0$.

Řešení

Pomocí operací s distribucemi lehce zjistíme, že

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \Delta \delta_0, e^{-a|x|^2} \varphi \rangle = \langle \delta_0, \Delta(e^{-a|x|^2} \varphi) \rangle.$$

Potřebujeme tedy spočítat

$$\begin{aligned} \Delta(e^{-a|x|^2} \varphi) &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (e^{-a|x|^2} \varphi) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-a|x|^2} \left(-2ax_j \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N e^{-a|x|^2} \left(4a^2 x_j^2 \varphi - 4ax_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - 2a\varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} \right) \\ &= e^{-a|x|^2} (4a^2|x|^2 \varphi - 4ax \cdot \nabla \varphi - 2aN\varphi + \Delta \varphi) \end{aligned}$$

Proto

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \delta_0, e^{-a|x|^2} (4a^2|x|^2 \varphi - 4ax \cdot \nabla \varphi - 2aN\varphi + \Delta \varphi) \rangle = -2aN\varphi(0) + \Delta \varphi(0)$$

a odtud už velmi jednoduše vidíme, že

$$T = -2aN\delta_0 + \Delta \delta_0.$$