

Fourierovy řady

Trigonometrické řady

1. Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $[-\pi, \pi]$ funkci $f(x) = x^4$. Vyšetřete konvergenci této řady a řady derivací.
2. Které koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in L^1(-\pi, \pi)$ se anulují, jestliže platí $f(-x) = f(x)$ a $f(x + \pi) = -f(x)$?
3. Jak prodloužíte funkci $f \in L^1(0, \pi/2)$ na interval $(-\pi, \pi)$, aby její Fourierova řada měla tvar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx$?
4. Následující funkce rozložte ve Fourierovu řadu a vyšetřete její konvergenci
 - a) $\sin^4 x$ na $(0, \pi)$
 - b) $f(x) = ax$ na $(-\pi, 0)$, $f(x) = bx$ na $(0, \pi)$
 - c) $|\sin x|$ na intervalu délky periody
 - d) $\max(0, x)$ na $(-\pi, \pi)$
 - e) e^{ax} na $(-1, 1)$
 - f) $\ln |\sin \frac{x}{2}|$ na intervalu periody
5. Rozložte do sinové a kosinové řady na $(0, \pi)$ funkci x^2 .

Sčítání trigonometrických řad

6. Sečtěte následující řady v uvedených intervalech
 - a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ $(0, 2\pi)$
 - b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ $[0, 2\pi]$
 - c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ $(-\pi, \pi)$
 - d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}$ $[-\pi, \pi]$
7. Spočtěte
 - a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$
 - b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$
 - c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$
 - d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Aplikace na řešení některých PDR

Pomocí trigonometrických řad řešte následující úlohy

8.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{na } (0, T) \times (0, l) \\ u(0, x) &= x(l - x) \quad \text{na } [0, l] \\ u_t(0, x) &= 0 \quad \text{na } [0, l] \\ u(t, 0) &= u(t, l) = 0 \quad \text{na } [0, T].\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{na } (0, T) \times (0, l) \\ u(0, x) &= 0 \quad \text{na } [0, l] \\ u_t(0, x) &= \cosh x \quad \text{na } [0, l] \\ u_x(t, 0) &= u_x(t, l) = 0 \quad \text{na } [0, T].\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{na } (0, T) \times (0, l) \\ u(0, x) &= xe^{-x} \quad \text{na } [0, l] \\ u(t, 0) &= u_x(t, l) = 0 \quad \text{na } [0, T].\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad \text{na } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 4\} \\ u(x, y) &= f_1(\varphi) \quad \text{na } x^2 + y^2 = 1 \\ u(x, y) &= f_2(\varphi) \quad \text{na } x^2 + y^2 = 4,\end{aligned}$$

kde f_1 a f_2 jsou 2π periodické spojité funkce, φ označuje úhlovou proměnnou v polárních souřadnicích.

8) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $u(0, x) = x(l-x)$ $u(t, 0) = u(t, l) = 0$
 $u_t(0, x) = 0$
 na $(0, \tau) \times (0, l)$

Rěšení budeme hledat ve tvaru $u(t, x) = T(t)X(x)$. Pak

$$T''(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x) \quad , \text{ tj. } \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Vlevo je fce v proměnné t , vpravo fce v proměnné x a rovnají se $\forall t, x \Rightarrow$ musí být rovný stejné konstantě λ .

• $X''(x) = \lambda X(x)$ s okrajovými podmínkami $X(0) = X(l) = 0$

Je-li $\lambda > 0$, obecné řešení je $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ a okrajové podmínky splňuje jen $C_1 = C_2 = 0$

Je-li $\lambda = 0$, obecné řešení je $X(x) = C_1 x + C_2$ a $C_1 = C_2 = 0$

Je-li $\lambda < 0$, obecné řešení je $X(x) = C_1 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{-\lambda}x$. $X(0) = 0$ dá $C_1 = 0$
 $X(l) = 0$ dá $C_2 \sin \sqrt{-\lambda}l = 0$

Abychom našli nenulové řešení, musí být $\sqrt{-\lambda}l = k\pi$, tedy $\lambda_k = -\frac{k^2 \pi^2}{l^2}$

Tedy pro $k = 1, 2, \dots$ máme $\lambda_k = -\frac{k^2 \pi^2}{l^2}$ a řešení $X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi x}{l}$

• $T''(t) = -\frac{k^2 \pi^2}{l^2} c^2 T(t)$. To je téměř stejná věc jako pro $X(x)$ a máme tak řešení

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{\pi c k t}{l} + B_k \sin \frac{\pi c k t}{l}$$

a konečně $u_k(t, x) = \left(a_k \cos \frac{\pi c k t}{l} + b_k \sin \frac{\pi c k t}{l} \right) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l}$, kde $a_k = A_k C_k$, $b_k = B_k C_k$

To je řešení pro každé $k \in \mathbb{N}$, rovnice je lineární $\Rightarrow$ součet řešení je také řešení $\Rightarrow$

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi c k t}{l} + b_k \sin \frac{\pi c k t}{l} \right) \sin \frac{\pi k x}{l}$$

a_k, b_k určíme z poč. podmínek: $t=0: u(0, x) = x(l-x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k x}{l}$

Potřebujeme rozvinout $x(l-x)$ do sinové řady na $(0, l) \Rightarrow$ prodloužíme liše a rozvineme do

Fourierovy řady na $(-l, l)$: ozn. varianta F. koeficienty jako $\tilde{b}_k$: $\tilde{b}_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx =$
 $= \frac{2}{l} \int_0^l x(l-x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin \frac{k\pi}{l} x dx - \frac{2}{l} \int_0^l x^2 \sin \frac{k\pi}{l} x dx = 2 \left[x \cdot \left(-\cos \frac{k\pi}{l} x \right) \cdot \frac{l}{k\pi} \right]_0^l + 2 \int_0^l \cos \frac{k\pi}{l} x \cdot \frac{l}{k\pi} dx$
 $+ \frac{2}{l} \left[x \cdot \cos \frac{k\pi}{l} x \cdot \frac{l}{k\pi} \right]_0^l - \frac{4}{l} \cdot \frac{l}{k\pi} \int_0^l x \cos \frac{k\pi}{l} x dx = -\frac{2l^2}{k\pi} \cdot (-1)^k + \frac{2l}{k\pi} \cdot \frac{l}{k\pi} \cdot \left[\sin \frac{k\pi}{l} x \right]_0^l + \frac{2l^2}{k\pi} \cdot (-1)^k -$
 $-\frac{4}{k\pi} \left(\left[x \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot \frac{l}{k\pi} \right]_0^l - \frac{l}{k\pi} \int_0^l \sin \frac{k\pi}{l} x dx \right) = -\frac{4l}{k^2 \pi^2} \cdot \frac{l}{k\pi} \cdot \left[\cos \frac{k\pi}{l} x \right]_0^l = -\frac{4l^2}{k^3 \pi^3} \cdot \left((-1)^k - 1 \right)$
 $= 0 \text{ pro } k \text{ sudé}$

$\Rightarrow a_k = \tilde{b}_k = 0$ pro $k=2m$ a $a_{2m+1} = \tilde{b}_{2m+1} = \frac{8l^2}{(2m+1)^3 \pi^3}$

Druhá poč. podmínka: $w_t(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-a_k \cdot \frac{\pi c k}{l} \sin \frac{\pi c k t}{l} + b_k \frac{\pi c k}{l} \cos \frac{\pi c k t}{l} \right) \sin \frac{\pi k x}{l}$

$0 = w_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\pi c k}{l} \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} \Rightarrow b_k = 0.$

Hledané řešení je $w(t,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g l^2}{(2m+1)^3 \pi^3} \cos \frac{\pi c (2m+1) t}{l} \sin \frac{\pi (2m+1) x}{l}$

9, DÚ

10, $\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ $w(0,x) = x e^{-x}$ $w(t,0) = w_x(t,l) = 0$

na $(0,T) \times (0,l)$. Opět hledáme řešení $w(t,x) = T(t)X(x)$

$\Rightarrow T'(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$

Začátek stejně jako příklad 8, $X_k(x) = C_1 \cos \sqrt{-\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{-\lambda} x$. $X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

dále ale chceme $X'(l) = 0$. $X'(x) = C_2 \sqrt{-\lambda} \cos \sqrt{-\lambda} x$
 $X'(l) = C_2 \sqrt{-\lambda} \cos \sqrt{-\lambda} l = 0$

$\Rightarrow \sqrt{-\lambda} l = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k=0,1,2,\dots \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = \frac{1}{l} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \Rightarrow \lambda_k = -\frac{1}{l^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right)^2$

a $X_k(x) = C_k \sin \frac{1}{l} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) x$

Druhá rovnice: $\frac{T'_k(t)}{T_k(t)} = -\frac{a^2}{l^2} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right)^2 \Rightarrow T_k(t) = A_k \cdot \exp \left(-\frac{a^2}{l^2} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right)^2 t \right)$

$\Rightarrow$ Řešení je ve tvaru $w(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \exp \left(-\frac{a^2}{l^2} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right)^2 t \right) \cdot \sin \left(\frac{1}{l} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) x \right)$

Poč. podmínka: $x e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin \left(\frac{1}{l} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) x \right)$ na $(0,l)$. Protože jde o vlastní řadu,
 fy tvoří úplný ortogonální systém, přebírá technicky vzato nejde o ~~trigonometrický~~ trigonometrický systém s řadami
 $\sin \frac{k\pi}{l} x$ kvůli členu $\frac{\pi}{2}$. $\int_0^l \sin^2 \left(\frac{1}{l} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) x \right) dx = \frac{l}{2} \Rightarrow a_k = \frac{2}{l} \int_0^l x e^{-x} \sin \left(\frac{1}{l} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) x \right) dx$

To vyřešíme per partes a po dlouhém počítání dojdeme k výsledku

$a_k = \frac{1}{\left(\frac{1}{l^2} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right)^2 + 1 \right)^2} \cdot \left(\frac{4}{l^2} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) - e^{-l} \cdot (-1)^k \cdot \left[l \left(\frac{1}{l^2} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right)^2 + 1 \right) - \frac{1}{l^2} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right)^2 + 1 \right] \frac{2}{l} \right)$

Poznámka: počáteční podmínka $x e^{-x}$ v bodě $x=l$ není kompatibilní s okrajovou podmínkou $w_x(l)=0$.

To nastane jen pro $l=1$, protože $(x e^{-x})' = (1-x) e^{-x} \big|_{x=l} = (1-l) e^{-l} = 0$ jen pro $l=1$.

$M, \Delta u = 0$ na $\Omega = \{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ $u(x,y) = f_1(\varphi)$ na $x^2 + y^2 = 1$
 $u(x,y) = f_2(\varphi)$ na $x^2 + y^2 = 4$

Převod do polárních souřadnic: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$

$\Rightarrow$ Řešíme $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ na $r \in (1,2), \varphi \in (0,2\pi)$

$u(1,\varphi) = f_1(\varphi)$
 $u(2,\varphi) = f_2(\varphi)$
 $u(r,0) = u(r,2\pi)$

Zvolíme $u(r,\varphi) = R(r)\phi(\varphi)$

Pak $R''(r)\phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}\phi''(\varphi)R(r) = 0$

$\frac{r^2(R''(r) + \frac{R'(r)}{r})}{R(r)} = - \frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = \lambda$

Hledáme 2π -periodické řešení rovnice $\phi''(\varphi) = -\lambda\phi(\varphi)$. To najdeme jen pro $\lambda > 0$, kdy

$\phi(\varphi) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} \varphi + C_2 \sin \sqrt{\lambda} \varphi$ $\phi(0) = C_1 = \phi(2\pi) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} 2\pi + C_2 \sin \sqrt{\lambda} 2\pi$

To zajišťujeme volbou $\sqrt{\lambda} = k, k = 0, 1, 2, \dots$ (tj. $\lambda = k^2$)

a $\phi_k(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi$, pro $k=0$ pak $\phi_0(\varphi) = \frac{a_0}{2}$

Rovnice pro R : $r^2 R''(r) + r R'(r) - k^2 R(r) = 0$. To je Eulerova rovnice

$r = e^t, Z(t) = R(e^t)$
 $Z'(t) = R'(e^t)e^t$
 $Z''(t) = R''(e^t)(e^t)^2 + R'(e^t)e^t = R''(r)r^2 + R'(r)r$

$\Rightarrow Z''(t) - k^2 Z(t) = 0 \Rightarrow Z(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} \mid \text{pro } k=0 \quad Z(t) = C_1 + C_2 t$
 $\Rightarrow R(r) = c_k r^k + d_k r^{-k} \mid R_0(r) = C_1 + C_2 \ln r$

Linearita $\Rightarrow$ Sečteme přes všechna k

$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + d_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^k + d_k r^{-k})(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$

Někdy se hodí jiný zápis: $u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + d_0 \ln r + \sum r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) + \sum (\frac{2}{r})^k (c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi)$
 (vynásobíme kraje $r=1, r=2$)

Obr. podm: $f_1(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_k + 2^k c_k) \cos k\varphi + (b_k + 2^k d_k) \sin k\varphi$

$f_2(\varphi) = \frac{a_0}{2} + d_0 \ln 2 + \sum_1^{\infty} (2^k a_k + c_k) \cos k\varphi + (2^k b_k + d_k) \sin k\varphi$

Z této soustavy pak vyřešíme a_k, b_k, c_k, d_k rozvinutím $f_1(\varphi)$ a $f_2(\varphi)$ do Fourierových řad.