Sada příkladů 2/11

Funkce komplexní proměnné

Elementární funkce

1. Najděte reálnou a imaginární část hodnoty následujících funkcí:
   a) $\cos(2+\mathrm{i})$ b) $\sin(2\mathrm{i})$ c) $\operatorname{tg}(2-\mathrm{i})$.

2. Dokažte, že pro $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.

3. Dokažte, že pro $z,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ platí:
   a) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$
   b) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_2 \sin z_1$
   c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
   d) $\sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh z$
   e) $\cos(\mathrm{i}z) = \cosh z$.

4. Nalezněte řešení rovnic:
   a) $\sin z + \cos z = 2$ b) $\sinh z - \cosh z = 2\mathrm{i}$

5. Najděte součet $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha + n\beta)$.

6. Při zobrazení $w = z^2$, $w = u + \mathrm{i}v$, $z = x + \mathrm{i}y$ najděte
   a) obrazy přímek $x = C$, $C \in \mathbb{R}$
   b) obrazy kružnic $|z| = R > 0$
   c) vzory přímek $u = C$.

7. Najděte obraz kartézské souřadnicové sítě ($x = C$, $y = C$) při zobrazení $w = \mathrm{e}^z$.

8. Najděte obraz $\operatorname{Im} z = 1$ při zobrazení $w = \frac{z-1}{z+1}$.

9. Najděte obraz $|z+1| = 1$ při zobrazení $w = \frac{1}{z}$.

10. Najděte obraz $|z| = 2$ při zobrazení $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

11. Zjistěte, zda funkce $f(z) = |z|$ je v nějaké oblasti holomorfní.

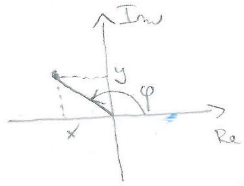
12. Nalezněte nutné a postačující podmínky na reálné konstanty a, b a c, aby následující funkce byly holomorfní
a) $f(z) = x + ay + \mathrm{i}(bx + cy)$
b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + \mathrm{i} \sin x(\cosh y + b \sinh y)$.

13. Ukažte, že reálná funkce $f(x + \mathrm{i}y) = f(z) = \sqrt{|xy|}$ splňuje v počátku Cauchy–Riemannovy podmínky, ale nemá tam derivaci podle z.

14. Dokažte, že platí
a) $(\sinh z)' = \cosh z$
b) $(\cosh z)' = \sinh z$
c) $(\sin z)' = \cos z$
d) $(\cos z)' = -\sin z$.

15. Nalezněte holomorfní funkci (na příslušné oblasti) $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, je-li
a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^x(x \cos y - y \sin y)$
b) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$
c) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

KOMPLEXNÍ ANALÝZA



$z \in \mathbb{C}$: $z = x + iy$ $\quad x = \mathrm{Re}\, z \in \mathbb{R}$, $\quad y = \mathrm{Im}\, z \in \mathbb{R}$ $\quad i^2 = -1$

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) \qquad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\varphi = \arg z$ volíme tak, aby $\varphi \in (-\pi, \pi]$

(není definováno pro $z = 0$)

$\bar{z} = x - iy$ pro $z = x + iy$

Elementární funkce: $e^z = \exp z := e^x (\cos y + i \sin y)$ pro $z = x + iy$

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} \quad \text{(poloměr konvergence řady je } \infty\text{!)}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

---

1) a) $\cos(2+i) = \frac{1}{2}\left(e^{2i-1} + e^{-2i+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} \cdot (\cos 2 + i \sin 2) + e(\cos 2 - i \sin 2)\right)$

$\Rightarrow \mathrm{Re} \cos(2+i) = \frac{\cos 2}{2}(e + e^{-1}) = \cos 2 \cdot \cosh 1$

$\mathrm{Im} \cos(2+i) = \frac{\sin 2}{2}(-e + e^{-1}) = -\sin 2 \sinh 1$

b) $\sin(2i) = \frac{1}{2i}\left(e^{-2} - e^{2}\right) = \frac{i}{2}\left(e^2 - e^{-2}\right) \Rightarrow \mathrm{Re} \sin(2i) = 0$, $\mathrm{Im} \sin(2i) = \sinh 2$

c) $$\mathrm{tg}(2-i) = \frac{\sin(2-i)}{\cos(2-i)} = \frac{\frac{1}{2i}\left(e^{1+2i} - e^{-1-2i}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{1+2i} + e^{-1-2i}\right)} = \frac{\frac{1}{2i}\left(e \cdot (\cos 2 + i \sin 2) - \frac{1}{e}(\cos 2 - i \sin 2)\right)}{\frac{1}{2}\left(e(\cos 2 + i \sin 2) + \frac{1}{e}(\cos 2 - i \sin 2)\right)} =$$

$$= \frac{\sin 2 \cosh 1 - i \cos 2 \sinh 1}{\cos 2 \cosh 1 + i \sin 2 \sinh 1} = \frac{(\sin 2 \cosh 1 - i \cos 2 \sinh 1)(\cos 2 \cosh 1 - i \sin 2 \sinh 1)}{\cos^2 2 \cosh^2 1 + \sin^2 2 \sinh^2 1} =$$

$$= \frac{\sin 2 \cos 2 (\cosh^2 1 - \sinh^2 1) - i \sinh 1 \cosh 1 (\cos^2 2 + \sin^2 2)}{\cos^2 2 \cosh^2 1 + \sin^2 2 \sinh^2 1 + \sin^2 2 \cosh^2 1 - \sin^2 2 \cosh^2 1} \Rightarrow \mathrm{Re}\, \mathrm{tg}(2-i) = \frac{\sin 2 \cos 2}{\cosh^2 1 - \sin^2 2}$$

$$\mathrm{Im}\, \mathrm{tg}(2-i) = \frac{-\sinh 1 \cosh 1}{\cosh^2 1 - \sin^2 2}$$

---

2) Ozn. $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$. Pak $\exp(z_1 + z_2) = \exp\left((a+c) + i(b+d)\right) = \exp(a+c) \cdot \left(\cos(b+d) + i \sin(b+d)\right)$

$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^a \cdot (\cos b + i \sin b) \cdot e^c (\cos d + i \sin d) =$

$= e^{a+c} \cdot \left[\cos b \cos d - \sin b \sin d + i(\sin b \cos d + \cos b \sin d)\right]$

$= \exp(a+c) \cdot \left[\cos(b+d) + i \sin(b+d)\right]$ CBD.

---

3) a) $\sin(z_1 + z_2) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} - e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2}\right)$

$\sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 = \frac{1}{4i}\left((e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + (e^{iz_2} - e^{-iz_2})(e^{iz_1} + e^{-iz_1})\right) = \frac{1}{4i}\left(2 e^{iz_1} e^{iz_2} - 2 e^{-iz_1} e^{-iz_2}\right)$

CBD.

b) $\cos(z_1+z_2) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2}\right)$

$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \frac{1}{4}\left(\left(e^{iz_1}+e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}+e^{-iz_2}\right) + \left(e^{iz_1}-e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}-e^{-iz_2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(2e^{iz_1}e^{iz_2} + 2e^{-iz_1}e^{-iz_2}\right)$

CBD

---

c) $\sin^2 z + \cos^2 z$: Využijeme b) pro $z_1 = z$, $z_2 = -z$. Pak LS $= e^0 = \cos 0 = 1$

PS $= \cos z \cdot \cos(-z) - \sin z \cdot \sin(-z) = \cos^2 z + \sin^2 z$

ze sudosti $\cos z$ a lichosti $\sin z$, což plyne z definic

---

d) $\sin(iz) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-z} - e^{z}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) = i \sinh z$

e) $\cos(iz) = \frac{1}{2}\left(e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-z} + e^{z}\right) = \cosh z$

4, a) $\sin z + \cos z = 2$. Hledáme $z = a + ib$

$\sin(a+ib) = \sin a \cos ib + \cos a \sin ib = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$ dle 3 a, d, e

$\cos(a+ib) = \cos a \cos ib - \sin a \sin ib = \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b$

$\Rightarrow$ LS : $\cosh b \cdot (\sin a + \cos a) + i \sinh b (\cos a - \sin a)$

PS : $2 + i0$

$\Rightarrow$ Soustava rovnic : $\sinh b\,(\cos a - \sin a) = 0$

$\cosh b\,(\sin a + \cos a) = 2$

1. rovnice : 1. možnost $\sinh b = 0 \Rightarrow b = 0$, a libovolné

$\Rightarrow$ 2. rovnice $\sin a + \cos a = 2$. To nemá v $\mathbb{R}$ řešení

2. možnost : $\sin a = \cos a \Rightarrow a = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b libovolné

$\Rightarrow$ 2. rovnice $\rightarrow$ k sudé : $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow \cosh b = \sqrt{2}$

$b = \pm \operatorname{argcosh} \sqrt{2}$

$\rightarrow$ k liché : $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \Rightarrow \cosh b = -\sqrt{2}$

nemá řešení

$\Rightarrow z = a + ib$, kde $a = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$b = \pm \operatorname{argcosh} \sqrt{2}$

($\operatorname{argcosh}\sqrt{2} = \ln(\sqrt{2}+1)$ a $-\operatorname{argcosh}\sqrt{2} = \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \ln(\sqrt{2}-1)$)

---

b) $\sinh z - \cosh z = 2i$ Opět $z = a + ib$

$\frac{1}{i}\sin(-b+ia) - \cos(-b+ia) = -i\left(-\sin b \cos ia + \cos b \sin ia\right) - \left(\cos b \cos ia + \sin b \sin ia\right)$

$= \cos b(\sinh a - \cosh a) + i \sin b(\cosh a - \sinh a) \Rightarrow \cos b(\sinh a - \cosh a) = 0$

$\sin b(\sinh a - \cosh a) = -2$

$\Rightarrow \cos b = 0$, tj. $b = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. rovnice: k liché : $\sinh a - \cosh a = 2 \Rightarrow e^{-a} = -2$ nemá řeš.

k sudé : $\sinh a - \cosh a = -2 \Rightarrow e^{-a} = 2 \Rightarrow a = -\ln 2$

$\Rightarrow z = -\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

Komplexní zobrazení, holomorfní funkce

f má v $a \in \mathbb{C}$ derivaci, jestliže existuje $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$. f je holomorfní v a, jestliže ex. okolí a t.ž. f tam má derivaci

je otevřená množina $\quad$ f je holomorfní v Ω, jestliže f má derivaci všude v Ω

Př: z^k je holomorfní $\forall k \in \mathbb{N}$ na $\mathbb{C}$, $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\bar{z}$ není holomorfní nikde!

<u>Věta</u> (Cauchy-Riemannovy podmínky) Nechť $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ má v $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ derivaci.

Označme $f(z) = u(z_1,z_2) + i\,v(z_1,z_2)$ pro $z = z_1 + iz_2$, kde $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

a $\mathbb{F}(z_1,z_2) := (u(z_1,z_2), v(z_1,z_2))$, tedy $\mathbb{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Pak

a) Funkce u,v v bodě $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ splňují $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ a $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$ (C.-R. p.)

b) $\mathbb{F}$ má v bodě (a_1,a_2) tot. diferenciál a $J_{\mathbb{F}}(a_1,a_2) = |f'(a)|^2$

<u>Věta</u> (Druhá věta o C.-R. p.): Nechť $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ a u,v jsou jako výše, nechť jsou definovány na okolí $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$. Jestliže u,v mají v (a_1,a_2) totální diferenciál a splňují v něm C.-R.p., pak f má v $a = a_1 + ia_2$ derivaci a platí $f'(a) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(a_1,a_2) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(a_1,a_2)$

---

5) $\beta = 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\beta) = n\cdot\cos\alpha$

$\beta \neq 2k\pi$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(\alpha+k\beta) = \mathrm{Re}\sum_0^n e^{i(\alpha+k\beta)} = \mathrm{Re}\, e^{i\alpha}\sum_0^n e^{ik\beta} = \mathrm{Re}\, e^{i\alpha}\frac{e^{i(n+1)\beta}-1}{e^{i\beta}-1}$

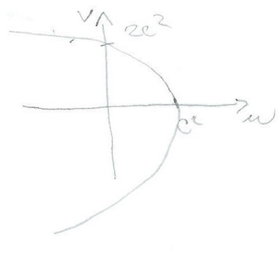
$\displaystyle = \mathrm{Re}\, e^{i\alpha}\frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}\beta}\cdot \sin\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right)}{e^{i\frac{\beta}{2}}\cdot\sin\frac{\beta}{2}} = \mathrm{Re}\, e^{i(\alpha+\frac{n}{2}\beta)}\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\cos(\alpha+\frac{n}{2}\beta)\sin\left(\frac{n+1}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$

---

6) $z = x+iy$, $w = z^2 = (x^2-y^2) + i(2xy) = u+iv$, tj. $u(x,y) = x^2-y^2$, $v(x,y) = 2xy$

a) $x = C$: $u = C^2 - y^2$, $v = 2Cy$ ... Je-li $C = 0$, pak $v = 0$, $u = -y^2$, tj. odraz je záporná reálná poloosa $u \le 0$.

... Je-li $C \neq 0$, pak $y = \dfrac{v}{2C} \Rightarrow u = C^2 - \dfrac{v^2}{4C^2}$ ... parabola



b) $|z| = R$, tj. $x^2+y^2 = R^2$: $u = x^2-y^2 = R^2 - 2y^2$

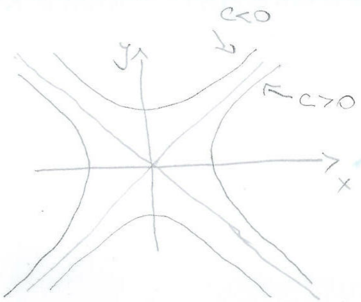
$v = 2xy = 2y\cdot\sqrt{R^2-y^2} \Rightarrow 4y^2\cdot(R^2-y^2) = v^2 \Rightarrow y^2 = \dfrac{R^2}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{R^4-v^2}$

$\Rightarrow u = R^2 - 2y^2 = \mp\sqrt{R^4-v^2} \Rightarrow u^2+v^2 = R^4$ ... odraz je kružnice o poloměru R^2.

c) $u = C$, v je libovolné

$x^2 - y^2 = C$ .... $C = 0$: dvojice přímek $y = \pm x$

$C \neq 0$: hyperboly



---

7) $w = e^z$ $\quad z = x + iy \Rightarrow w = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$

$u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$

$x = C$: $\left. \begin{array}{l} u = e^C \cos y \\ v = e^C \sin y \end{array} \right\}$ $u^2 + v^2 = e^{2C}$ ... kružnice o poloměru e^C

$y = C$: $\left. \begin{array}{l} u = e^x \cos C \\ v = e^x \sin C \end{array} \right\}$
- $C = 0 \Rightarrow$ kladná reálná poloosa $u > 0, v = 0$
- $C = \pi/2 \Rightarrow$ kladná imaginární poloosa $u = 0, v > 0$
- $C = \pi \Rightarrow$ záporná reálná poloosa $u < 0, v = 0$
- $C = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow$ záporná imaginární poloosa $u = 0, v < 0$

$C \neq k\frac{\pi}{2} \Rightarrow e^x = \frac{u}{\cos C} \Rightarrow v = u \cdot \operatorname{tg} C$ ... polopřímky startující z počátku

vše je 2π - periodické

---

8) $w = \frac{z-1}{z+1}$ $\quad z = x + iy$ $\quad w = \frac{x-1+iy}{x+1+iy} = \frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2-1+y^2+2iy}{(x+1)^2+y^2}$

$y = 1$: $w = \frac{x^2+2i}{x^2+2x+2}$ $\quad u = \frac{x^2}{x^2+2x+2}$, $v = \frac{2}{x^2+2x+2} \Rightarrow x^2+2x+2 = \frac{2}{v}$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{v}-1} - 1$

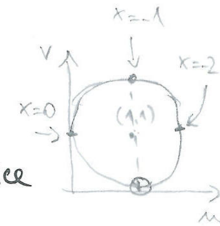
$u = x^2 \cdot \frac{v}{2}$

$\Rightarrow x^2 = \frac{2}{v} \mp 2\sqrt{\frac{2}{v}-1}$

$\Rightarrow u = \frac{v}{2} \cdot \left(\frac{2}{v} \mp 2\sqrt{\frac{2}{v}-1} \right)$

$= 1 \mp \sqrt{v} \cdot \sqrt{2-v} \Rightarrow (u-1)^2 = v \cdot (2-v) = 2v - v^2$

$\Rightarrow (u-1)^2 + (v-1)^2 = 1$ ... kružnice



Technicky vzato mimo bod 1, který se "nabývá" jen jako limita $x \to \pm\infty$

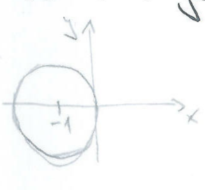
---

9) $w = \frac{1}{z}$ $\quad z = x + iy$ $\quad w = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ $\quad u = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\quad v = -\frac{y}{x^2+y^2}$

$|z+1| = 1$ je $(x+1)^2 + y^2 = 1$

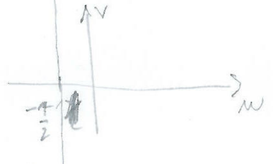
$x^2 + 2x + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = -2x$ $\quad \Rightarrow u = -\frac{1}{2}$ $\quad v = \frac{y}{2x} = \frac{\pm\sqrt{-2x-x^2}}{2x}$

$= \pm\sqrt{-\frac{1}{4} - \frac{1}{2x}}$



kde $x \in [-2, 0]$ dle obrázku. $\left. \begin{array}{l} x = -2 : v = 0 \\ x = -1 : v = \pm\frac{1}{2} \\ x \to 0_- : v \to \pm\infty \end{array} \right\}$ v nabývá lib. hodnot na celém $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ obraz dané kružnice je přímka $-\frac{1}{2} + ti$, $t \in \mathbb{R}$



③

10) $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ $\quad z = x+iy \quad$ $w = \frac{1}{2}\left(x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)$

$$= \frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2} + i\,\frac{x^2y+y^3-y}{x^2+y^2}$$

$|z|=2 : x^2+y^2=4 \quad : \quad u = \frac{5x}{4} \qquad v = \frac{3}{4}y \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{4}{5}x\right)^2 + \left(\frac{4}{3}y\right)^2 = 4$

$$\frac{4}{25}x^2 + \frac{4}{9}y^2 = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}y\right)^2 = 1 \text{ ... elipsa}$$

---

11) Ne!! $\quad u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad$ Nesplňuje nikde C.-R.p.!
$v(x,y) = 0$

Obecně, pokud je funkce komplexní proměnné reálná (její im. část je $\equiv 0$), pak musí být konstantní, pokud má být holomorfní. $|z|$ není konstantní na žádné otev. množině v $\mathbb{C}$.

---

12) a) $f(z) = x+ay+i(bx+cy)$, tj. $z = x+iy$ $\quad u(x,y) = x+ay$
$v(x,y) = bx+cy$

C.-R.p.: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = c \quad \Rightarrow \quad \underline{c=1}!$
$\frac{\partial v}{\partial x} = b \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a \quad \Rightarrow \quad \underline{b=-a}$
$\Big\}$ Nutná podmínka

Postačující podmínka: C.-R.p. + existence tot. dif. $u(x,y)$ a $v(x,y)$. To jsou lineární fce
$\Rightarrow$ ex. tot. dif. všude, tj. $c=1$, $b=-a$ jsou nutné i postačující podmínky

b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a\sinh y) + i\sin x(\cosh y + b\sinh y)$ $\quad u(x,y) = \cos x(\cosh y + a\sinh y)$
$v(x,y) = \sin x(\cosh y + b\sinh y)$

C.-R.p.: $\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x(\cosh y + a\sinh y)$
$\frac{\partial v}{\partial y} = \sin x(\sinh y + b\cosh y)$
$\Big\}$ $a=-1$, $b=-1$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos x(\cosh y + b\sinh y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos x(\sinh y + a\cosh y)$
$\Big\}$ $a=-1$, $b=-1$

Nutná podmínka, která je i postačující, protože tot. dif. fcí u, v existují všude

---

13) $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$, tj. $u(x,y) = \sqrt{|xy|}$
$v(x,y) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = 0$
$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0,h)-u(0,0)}{h} = 0$
$\Big\}$ C.-R.p. splněny

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{h_1+ih_2}$ .... $h_1 = 0,\ h_2 \to 0$: $\lim_{h_2\to 0} 0 = 0$

$h_1 = h_2$: $\lim_{h_1\to 0} \frac{|h_1|}{h_1(1+i)} = \frac{1}{1+i} \underbrace{\lim_{h_1\to 0} \frac{|h_1|}{h_1}}_{\text{nemá limitu}}$

$\Rightarrow f'(0)$ neex.

14) Funkce e^z, sin/cos, sinh/cosh jsou zavedeny jako součty řad stejně jako jejich reálné protějšky. Tyto řady mají poloměr konvergence $R=\infty$ a podle věty o holomorfnosti součtu řady též definují holomorfní fce, které tedy lze derivovat člen po členu. Proto

$$(e^z)' = \left(\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_0^\infty \frac{n\cdot z^{n-1}}{n!} = \sum_1^\infty \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_0^\infty \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Vztahy pro sin/cos a sinh/cosh lze odvodit buď analogicky skrz řady nebo pomocí derivace exponenciály:

$$(\sinh z)' = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) = \cosh z$$

$$(\cosh z)' = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = \sinh z$$

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} + ie^{-iz}\right) = \cos z$$

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(ie^{iz} - ie^{-iz}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\sin z$$

---

15) a) $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x(\cos y) = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = 2xy + e^x(x+1)\sin y - e^x \overbrace{\int y\sin y\,dy}^{-y\cos y + \sin y} + C_1(x)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy - e^x \sin y + C_1(x) + e^x((\cancel{x+1})\sin y + y\cos y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - e^x(\sin y + y\cos y) = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int 2y + e^x(\sin y + y\cos y)\,dx = 2xy + e^x\sin y + e^x y\cos y + C_2(y) + \sin y \overbrace{\int x e^x\,dx}^{xe^x - e^x}$$

$$= 2xy + e^x\left[y\cos y + x\sin y\right] + C_2(y)$$

Porovnáním obou výsledků vidíme, že se nic neztratilo, a proto $C_1(x) = C_2(y) = C$ a

$$v(x,y) = 2xy + e^x(y\cos y + x\sin y) + C, \quad z \in \mathbb{C}, \ C \in \mathbb{R}$$

Spojením u+iv a zjednodušením najdeme f(z) = z^2 + ze^z + Ci

b) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + 5y + 2x\int \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dy = 2xy + 5y + x\int \frac{1}{(t+x^2)^2}\,dt = 2xy + 5y - \frac{x}{y^2+x^2} + C_1(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1 - \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + x + \int \frac{dx}{x^2+y^2} - 2y^2\int \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx = 2xy + x + \frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - 2y^2\left[\frac{x}{2y^2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2y^2}\int \frac{dx}{x^2+y^2}\right]$$

$$= 2xy - x - \frac{x}{y^2+x^2} + C_2(y)$$

$$\Rightarrow C_1(x) = x, \ C_2(y) = 5y \ \text{ a } \ v(x,y) = 2xy - x + 5y - \frac{x}{y^2+x^2} + C, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \ C \in \mathbb{R}$$

c) DÚ

Spojením u+iv a zjednodušením najdeme f(z) = z^2+(5-i)z -i/z + Ci