Sada příkladů 3/11

Funkce komplexní proměnné

Křivkový integrál

Spočtěte následující křivkové integrály:

1. $\displaystyle\int_\varphi z\,\mathrm{d}z$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu $(1,0)$ do $(-1,0)$ přes horní polorovinu.

2. $\displaystyle\int_\varphi (z-a)^n\,\mathrm{d}z$, φ je kladně orientovaná kružnice $|z-a| = R$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$.

3. $\displaystyle\int_\varphi |z|\,\mathrm{d}z$, φ je průvodič bodu $2-\mathrm{i}$.

4. $\displaystyle\int_\varphi \frac{z}{\bar{z}}\,\mathrm{d}z$, φ je kladně orientovaný obvod horního mezikruží se středem v počátku a poloměry 1 a 2.

5. Jakých hodnot může nabývat $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z^2+9}$, je-li φ uzavřená křivka, která neprochází body $\pm 3\mathrm{i}$.

6. Vypočtěte $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2-1)}$, je-li φ kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu
   a) 1 b) 0 c) -1

7. Vypočtěte $\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z(z-1)^3}$, je-li φ kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu
   a) -1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$

8. Vypočtěte $\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z^2+a^2}$, je-li φ: $2a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.

Cauchyova věta

1. Vypočtěte integrál $I = \int_\varphi |z|\overline{z}\,\mathrm{d}z$, kde φ je záporně orientovaný obvod jednotkového polokruhu $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

2. Vypočtěte $I = \int_C \frac{z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z^2+4}$. kde C je kladně proběhnutá kružnice o středu $2\mathrm{i}$ a poloměru 2.

3. Spočtěte
   a) $\int_{|z+\mathrm{i}|=3} \frac{\sin z}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$
   b) $\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$.

4. Spočtěte $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}$, je-li C kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu 2.

5. Nechť funkce $f(z)$ je regulární v pásu $-a < \operatorname{Im} z < a$ a vyhovuje podmínce $f(z) \to 0$ když $z \to \infty$, $-a < \operatorname{Im} z < a$. Dokažte, že když $\int_\infty^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak pro každé $\alpha \in (-a, a)$ integrál $\int_{\mathrm{i}\alpha-\infty}^{\mathrm{i}\alpha+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ také konverguje a jeho hodnota nezávisí na α.

6. Dokažte:
   Je-li f spojitá v oblasti $0 < |z-a| \leq r_0$, $0 \leq \arg(z-a) \leq b$, kde $r_0 > 0$, $0 < b \leq 2\pi$ a existuje-li vlastní limita $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = A$, potom $\lim_{r\to 0+} \int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}Ab$, kde C_r je kladně proběhnutý oblouk kružnice $|z-a| = r$, vyťatý úhlem $0 \leq \arg(z-a) \leq b$.

7. Spočtěte (použijte předchozí příklad)
   a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$
   b) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL V $\mathbb{C}$

Křivka : zobrazení φ z $[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, regulární, je-li $\varphi'(t) \neq 0$ na $[a,b]$

Jednoduchá křivka : φ je prostá na $[a,b)$ a na $(a,b]$ a φ^{-1} spojitá na obrazu (a,b)

Uzavřená křivka : $\varphi(a) = \varphi(b)$

Jordanova křivka : jednoduchá + uzavřená

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, pak $\int_\varphi f(z)\,dz := \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$, jestliže PS existuje jako Lebesgueův integrál

$l_\varphi := \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt$ ... délka křivky

Vnímáme-li $\mathbb{C}$ jako $\mathbb{R}^2$, je f vektorová fce a $\int_\varphi f(z)\,dz$ je vlastně křivkový integrál 2. druhu.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, f, F jsou definované na Ω. Je-li $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$, pak F je primitivní fcí k f na Ω.

<u>Věta</u> : $\Omega \subset \mathbb{C}$ otev., f spojitá na Ω. PNTJE : (i) f má v Ω primitivní fci

(ii) $\forall \varphi$ uzavřenou, po částech C^1 : $\int_\varphi f(z)\,dz = 0$
$(\langle\varphi\rangle \subset \Omega)$

(iii) Křivkový integrál z f nezávisí na cestě v Ω.

<u>Věta</u> : $\Omega \subset \mathbb{C}$ otev., f spojitá a F primitivní k f. Pak $\forall \varphi : [a,b] \to \Omega$ (po částech C^1) : $\int_\varphi f(z)\,dz = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

---

1) $\int_\varphi z\,dz$, φ : polokružnice $|z| = 1$ z $(1,0)$ do $(-1,0)$ přes horní polorovinu

$f(z) = z$ má primitivní fci $F(z) = \frac{z^2}{2}$ všude v $\mathbb{C}$ $\Rightarrow \int_\varphi z\,dz = F(1) - F(-1) = \underline{\underline{0}}$

Ověříme i z definice: $\varphi : [0,\pi] \longmapsto \mathbb{C}$: $\varphi(t) = e^{it}$, $\varphi'(t) = i e^{it}$

$$\int_\varphi z\,dz = \int_0^\pi e^{it}\, i e^{it}\,dt = i \int_0^\pi e^{2it}\,dt = \frac{i}{2i}\left[e^{2it}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

---

2) $\int_\varphi (z-a)^n\,dz$, φ : kladně orientovaná kružnice $|z-a| = R$, $n \in \mathbb{Z}$

• $n \geq 0$: f má primitivní fci $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \int_\varphi (z-a)^n\,dz = 0$

(z definice : $\varphi : [0,2\pi] \longmapsto \mathbb{C}$: $\varphi(t) = Re^{it} + a$

$$\int_\varphi (z-a)^n\,dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n\, iRe^{it}\,dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt$$
$$= iR^{n+1}\left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = \underline{0}$$

• $n < 0$: analogicky jako výše : $\int_\varphi (z-a)^n\,dz = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt$ ... $n = -1$: $\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \Rightarrow \int_\varphi (z-a)^n\,dz = \underline{\underline{2\pi i}}$

$n \neq -1$: $iR^{n+1}\left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}}$, protože $e^{2\pi i(n+1)} = 1$ pro $n \in \mathbb{Z}$

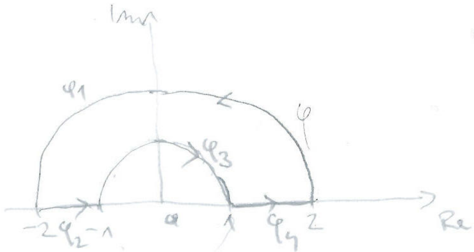
3) $\int_\varphi |z|\,dz$, φ je průvodič bodu $2-i$

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{C} : \quad \varphi(t) = (2-i)t$$
$$\varphi'(t) = (2-i)$$

$$|(2-i)t| = \sqrt{5}\,t \quad \Rightarrow \quad \int_\varphi |z|\,dz = \int_0^1 \sqrt{5}\,t\cdot(2-i)\,dt = \sqrt{5}(2-i)\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2}i}}$$

---

4) V zadání je překlep, má být "polomezikruží", tj. viz obrázek



φ má 4 kusy.

$\varphi_1(t) = 2e^{it}$ pro $t \in (0,\pi)$ $\quad \varphi_1' = 2ie^{it}$

$\varphi_2(t) = -2+t$ pro $t \in (0,1)$ $\quad \varphi_2' = 1$

$\varphi_3(t) = -e^{-it}$ pro $t \in (0,\pi)$ $\quad \varphi_3' = ie^{-it}$

$\varphi_4(t) = 1+t$ pro $t \in (0,1)$ $\quad \varphi_4' = 1$

$$\int_{\varphi_1} \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_0^\pi \frac{2e^{it}}{2e^{-it}}\,2ie^{it}\,dt = 2i\int_0^\pi e^{3it}\,dt = \frac{2}{3}\left[e^{3it}\right]_0^\pi = \frac{2}{3}\cdot(-1-1) = -\frac{4}{3}$$

$$\int_{\varphi_2} \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_0^1 \frac{-2+t}{-2+t}\cdot 1\,dt = 1$$

$$\int_{\varphi_3} \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_0^\pi \frac{-e^{-it}}{-e^{it}}\,ie^{-it}\,dt = i\int_0^\pi e^{-3it}\,dt = \frac{i}{-3i}\left[e^{-3it}\right]_0^\pi = -\frac{1}{3}(-1-1) = \frac{2}{3}$$

$$\int_{\varphi_4} \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_0^1 \frac{1+t}{1+t}\cdot 1\,dt = 1$$

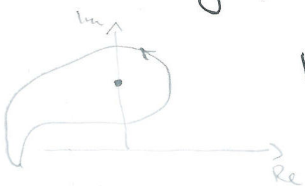
$$\int_\varphi \frac{z}{\bar z}\,dz = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 2 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

---

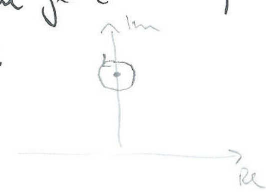
5) $\displaystyle\int_\varphi \frac{dz}{z^2+9} = -\frac{1}{6i}\int_\varphi \frac{dz}{z+3i} + \frac{1}{6i}\int_\varphi \frac{dz}{z-3i}$ $\qquad \displaystyle\frac{1}{z\pm 3i}$ jsou holomorfní na každé oblasti, která neobsahuje body $\pm 3i$

a) φ je taková, že $\pm 3i$ obě leží vně křivky φ: $\displaystyle\int_\varphi \frac{dz}{z^2+9} = 0$ z holomorfnosti

b) $3i$ je uvnitř, $-3i$ je vně:



Integrál přes libovolnou křivku je z holomorfnosti roven integrálu přes kružnici



$\varphi(t) = 3i + \varepsilon e^{it}$ $\quad t \in [0,2\pi]$

$\varphi'(t) = i\varepsilon e^{it}$

$$\Rightarrow \int_\varphi \frac{dz}{z-3i} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{it}}\cdot i\varepsilon e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi i \quad \Rightarrow -\frac{1}{6i}\int_\varphi \frac{dz}{z-3i} = -\frac{\pi}{3}$$

Křivka může bod $3i$ oběhnout několikrát, i v opačném směru $\Rightarrow$ možné hodnoty jsou $k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $-3i$ uvnitř, $3i$ vně: analogicky, opět možné hodnoty $k\frac{\pi}{3}$

d) obě uvnitř opět naintegrujeme pouze celé násobky $\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ Možné hodnoty jsou $k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

6) $\int_\varphi \frac{dz}{z(z^2-1)} = \int_\varphi \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1}\,dz$ | zakrývací metodou $A=-1$, $B=C=\frac{1}{2}$

$$= \int_\varphi -\frac{1}{z}\,dz + \frac{1}{2}\int_\varphi \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2}\int_\varphi \frac{dz}{z+1}$$

a) $\varphi(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$. Z holomorfnosti vypadnou první a třetí integrál

$\varphi'(t) = \frac{1}{2}i\,e^{it}$

$$\int_\varphi \frac{dz}{z(z^2-1)} = \frac{1}{2}\int_\varphi \frac{dz}{z-1} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{2}e^{it}}\cdot\frac{1}{2}i e^{it}\,dt = \pi i$$

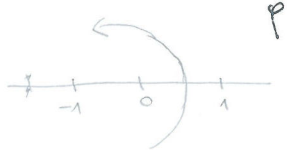
(podle směru obíhání bude $\pm\pi i$)

b) Vypadnou ~~první a~~ třetí a druhý integrál a stejným výpočtem $\int_\varphi \frac{dz}{z(z^2-1)} = -\int_\varphi \frac{1}{z}\,dz = -2\pi i$

(dle směru $\pm 2\pi i$)

c) Vypadne první a druhý integrál. $\int_\varphi \frac{dz}{z(z^2-1)} = \frac{1}{2}\int_\varphi \frac{dz}{z+1} = \pi i$ (dle směru $\pm\pi i$)

7) $I = \int_\varphi \frac{1}{2\pi i}\frac{e^z\,dz}{z(z-1)^3} = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi -\frac{e^z}{z} + \frac{e^z}{z-1} - \frac{e^z}{(z-1)^2} + \frac{e^z}{(z-1)^3}\,dz$

a) 

Z holomorfnosti vypadnou poslední tři integrály

$$I = -\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^z}{z}\,dz$$

Nejjednodušší je zde využít Cauchyův vzorec: f holomorfní uvnitř křivky φ (kladně orientované), $z_0 \in \operatorname{Int}\varphi$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$\text{a } f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$$

Použijeme pro $z=0$: $-e^0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^z}{z}\,dz$, tj. $\underline{I = -1}$

b) Vypadne první integrál. $I = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^z}{z-1}\,dz}_{A} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^z}{(z-1)^2}\,dz}_{B} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^z}{(z-1)^3}\,dz}_{C}$

Cauchyův vzorec pro $z_0 = 1$: $A = e^{1}$, $B = e^{1}$, $C = \frac{e^{1}}{2}$

$$I = e^{1} - e^{1} + \frac{e^{1}}{2} = \underline{\underline{\frac{e}{2}}}$$

c) Nevypadne žádný integrál, spočítáme stejně $\underline{I = -1 + \frac{e}{2}}$

8) $\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^z}{z^2+a^2} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{2ia}\left(\int_\varphi \frac{e^z}{z-ia}\,dz - \int_\varphi \frac{e^z\,dz}{z+ia}\right)$ φ je kružnice o poloměru $2a$, středu v počátku, kladně orientovaná $\Rightarrow$ obkrouží oba body $\pm ia$. Dle Cauchyova vzorce je pak

$$I = \frac{1}{2ia}\left(e^{ia} - e^{-ia}\right) = \frac{\sin a}{a}$$

CAUCHYOVA VĚTA

(Už jsme ji v zásadě používali posledně)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, f holomorfní v Ω. Pak pro každou po částech C^1, uzavřenou křivku φ splňující $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$ platí $\int_\varphi f(z)\,dz = 0$

K počítání se občas bude hodit

Jordanovo lemma: $R_0 > 0$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| > R_0\}$, $\alpha \geq 0$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spojitá na $\overline{\Omega}$.

Definujme $\Gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ a $M_R = \max_{\langle\Gamma_R\rangle} |f|$

Dále mějme buď i) $\alpha = 0$ a $RM_R \to 0$ pro $R \to +\infty$ nebo

ii) $\alpha > 0$ a $M_R \to 0$ pro $R \to +\infty$

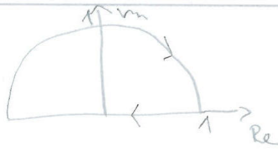
Pak $\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\alpha z}\,dz \to 0$ pro $R \to \infty$. Analogicky pro $\operatorname{Im} z < 0$ a $t \in [\pi, 2\pi]$ a integrály $\int f(z) e^{-i\alpha z}$

Cauchyův vzorec: Γ kladně orientovaná Jordanova, po částech C^1 křivka v $\mathbb{C}$. f holomorfní v $\operatorname{Int}\Gamma$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$. Pak $\forall z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \quad a \quad \forall k \in \mathbb{N} \ f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz$$

---

1) $I = \int_\varphi |z|\bar{z}\,dz$,



$\varphi_1(t) = e^{it}$, $t \in (\pi, 0)$

$\varphi_1'(t) = ie^{it}$

$\int_{\varphi_1} |z|\bar{z}\,dz = \int_\pi^0 1 e^{-it} i e^{it}\,dt = -\pi i$

$\varphi_2(t) = t$, $t \in (1, 0)$

$\varphi_2'(t) = 1$ $\quad \int_{\varphi_2} |z|\bar{z}\,dz = \int_1^0 t^2\,dt = -\frac{1}{3}$

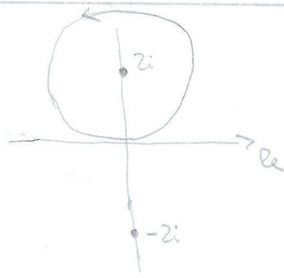
$\varphi_3(t) = t$, $t \in (0, -1)$

$\varphi_3'(t) = 1$ $\quad \int_{\varphi_3} |z|\bar{z}\,dz = \int_0^{-1} -t \cdot t\,dt = -\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{-1} = \frac{1}{3}$

$I = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} = \underline{\underline{-\pi i}}$

---

2) $I = \int_C \frac{z e^z}{z^2 + 4}\,dz$ $\quad C = \varphi$, $\varphi(t) = 2i + 2e^{it}$, $t \in (0, 2\pi)$



$\frac{z}{z^2 + 4} = \frac{A}{z - 2i} + \frac{B}{z + 2i}$, $A = B = \frac{1}{2}$

$I = \underbrace{\int_C \frac{1}{2} \frac{e^z}{z - 2i}}_{\vdots} + \underbrace{\int_C \frac{1}{2} \frac{e^z}{z + 2i}}_{\text{holomorfní uvnitř } C \Rightarrow \int_C = 0\,!}$

Cauchyův vzorec: $e^{2i} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z - 2i}\,dz \Rightarrow I = \pi i e^{2i} = -\pi \sin 2 + \pi i \cos 2$

---

3) a) $\int_\varphi \frac{\sin z\,dz}{z + i} = I$ $\quad \varphi(t) = -i + 3e^{it}$, $t \in (0, 2\pi)$ $\quad -i$ je uvnitř $\varphi \Rightarrow$ Cauchyův vzorec

$I = 2\pi i \sin(-i) = -2\pi i \sin(i) = \underline{2\pi \sinh 1}$

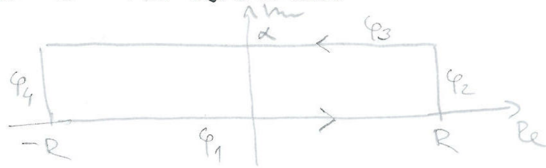
b) $\int_\varphi \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = I \qquad \varphi = 2e^{it} \quad t\in(0,2\pi)$

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} \qquad A = B = -1/2$$

$$I = \int_\varphi \frac{1}{2}\frac{e^z}{z-1}dz - \int_\varphi \frac{1}{2}\frac{e^z}{z+1}dz = \pi i e - \pi i e^{-1} = \underline{2\pi i \sinh 1}$$

4) viz příklad 7 b) z předchozí série $\quad I = -\frac{\pi}{2}$ (pozor na znaménko v zadání)

5) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$. Uvažujme křivku ve tvaru obdélníku



Pak $\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{\varphi_1} f(z)\,dz$

$$\int_{\varphi_3} f(z)\,dz = -\int_{i\alpha-R}^{i\alpha+R} f(x)\,dx$$

$$\int_{\varphi_2} f(z)\,dz = \int_0^\alpha f(R+ti)\,i\,dt \quad \text{a} \quad \int_{\varphi_4} f(z)\,dz = -\int_0^\alpha f(-R+ti)\,i\,dt$$

$\left|\int_{\varphi_2} f(z)\,dz\right| \le \int_0^\alpha |f(R+ti)|\,dt \to 0$ pro $R\to\infty$ dle předpokladu $f(z)\to 0$ pro $z\to\infty$

Totéž pro $\int_{\varphi_4}$. $\quad$ Cauchy: $\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4} = 0$

$$\Rightarrow \int_{\varphi_1} = -\int_{\varphi_3} \underbrace{-\int_{\varphi_2} - \int_{\varphi_4}}_{\xrightarrow{R\to\infty} 0}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\varphi_1} = -\lim_{R\to\infty}\int_{\varphi_3} = \lim \int_{i\alpha-R}^{i\alpha+R} f(x)\,dx = \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} f(x)\,dx$$

Toto budeme dále označovat jako "lemma o obkružování pólu násobnosti 1".

6)

$$\int_{C_r} f(z)\,dz = \int_0^b f(a+re^{it})\,ire^{it}\,dt$$

viz níže

$$\lim_{r\to 0_+}\int_{C_r} f(z)\,dz = \lim_{r\to 0_+}\int_0^b f(a+re^{it})\,i\,re^{it}\,dt \overset{?}{=} i\int_0^b \lim_{r\to 0_+} f(a+re^{it})\,re^{it}\,dt$$

$f(a+re^{it})\,re^{it} = f(z)(z-a)$ pro $z = a+re^{it}$

Z existence limity $f(z)(z-a)$ plyne existence limity $\lim_{r\to 0_+} f(a+re^{it})re^{it}$ a rovnost těchto limit.

Proto $\lim_{r\to 0_+}\int_{C_r} f(z)\,dz = i\int_0^b A\,dt = iAb$

Prohození limity a integrálu:

$g_r(t) := f(a+re^{it})\,re^{it} \qquad f$ spojitá $\Rightarrow g_r$ spojitá $\Rightarrow g_r$ měřitelná

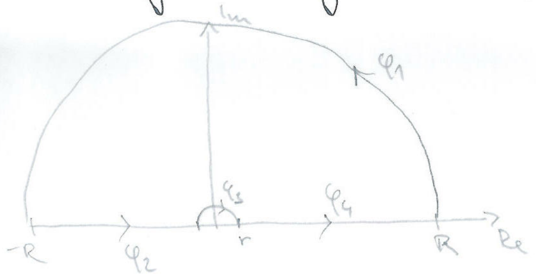
$\lim_{r\to 0_+} g_r(t) = A \quad \forall t\in(0,b) \Rightarrow |g_r(t)| \le 2A$ pro $r \le \tilde{r}_0$

$\tilde{r}_0$ dost. malé $\Rightarrow$ Máme majorantu $\Rightarrow$ Lebesgueova věta.

7) a) $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ Použijeme $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$

a $I = \operatorname{Im} \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x}\,dx$

Uvažujme následující uzavřenou křivku a fci $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$



$$\int_\varphi f(z)\,dz = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4} = 0 \text{ z holomorfnosti}$$

$\int_{\varphi_1} f(z)\,dz$: Jordanovo lemma : $\alpha = 1$, $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z}$, $M_R \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\varphi_1} f(z)\,dz = 0$$

Dále z lichosti fcí $\sin x$ a x platí $\operatorname{Im} \int_{\varphi_2} f(z)\,dz = \operatorname{Im} \int_{\varphi_4} f(z)\,dz$

$$\int_{\varphi_3} \frac{e^{iz}}{z}\,dz =$$

Použijeme 6) : $a = 0, b = \pi$, $\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{e^{iz}}{z} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0_+} \int_{\varphi_3} f(z)\,dz = -i\pi \quad \text{(− protože obíháme v opačném směru)}$$

Zlimitíme $r \to 0_+$ a $R \to +\infty$, vezmeme Im z výsledku a dostaneme

$$2\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx - \pi = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

---

b) $I = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ Stejná křivka jako výše, opět je součet $= 0$ z holomorfnosti

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{e^{iz}}{z^2} = g(z) - h(z) \qquad g(z) = \frac{1}{z^2} \qquad h(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}$$

φ_1: $\int_{\varphi_1} g(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{1}{R^2 e^{2it}} \cdot Rie^{it} = \frac{i}{R}\int_0^\pi e^{-it}\,dt \to 0$ pro $R \to \infty$

$\int_{\varphi_1} h(z)\,dz$: Použijeme Jordanovo lemma, $\alpha = 1$, $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z^2}$, $M_R \to 0$

$\Big\}\ \lim_{R\to 0} \int_{\varphi_1} f(z)\,dz = 0$

$\varphi_2 + \varphi_4$: $\operatorname{Re} \int_{\varphi_2} f(z)\,dz = \operatorname{Re} \int_{\varphi_4} f(z)\,dz$ ze sudosti fce $\frac{1-\cos x}{x^2}$

φ_3: Použijeme 6) $a = 0$, $b = \pi$, $\lim_{z\to 0} \frac{1-e^{iz}}{z^2} \cdot z = \lim_{z\to 0} \frac{1-e^{iz}}{z} = -i$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0_+} \int_{\varphi_3} f(z)\,dz = -i\pi \cdot (-i) = -\pi$$

Zlimitíme $r \to 0_+$, $R \to +\infty$, vezmeme Re z výsledku a dostaneme $2\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx - \pi = 0$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$