Sada příkladů 4/11

Funkce komplexní proměnné

Komplexní logaritmus, obecná mocnina

1. Najděte reálnou a imaginární část hodnoty následujících funkcí:
   a) $\ln(-1)$ b) $\ln \mathrm{i}$ c) $\ln(-2+3\mathrm{i})$.

2. Najděte všechny hodnoty následujících funkcí:
   a) $1^{\sqrt{2}}$ b) 2^{i} c) $(3+4\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$.

   Počáteční hodnota $\arg f(z)$ resp. $\operatorname{Im} f(z)$ je pro $z=2$ rovna 0. Bod z proběhne kružnici se středem v počátku a poloměru 2 v kladném směru, $\arg f(z)$ resp. $\operatorname{Im} f(z)$ závisí spojitě na z. S jakou hodnotou se vrátí $\arg f(z)$ resp. $\operatorname{Im} f(z)$ zpět do bodu $z=2$?

3. $f(z)=\sqrt[3]{z-1}$

4. $f(z)=\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$

5. $f(z)=2\ln z$

6. $f(z)=\ln z+\ln(z+1)$

   Spočtěte následující křivkové integrály:

7. $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$, φ je polokružnice $|z|=1$, z bodu (1,0) do $(-1,0)$ přes horní polorovinu, $\sqrt{1}=1$

8. $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$, φ je polokružnice $|z|=1$, z bodu (1,0) do $(-1,0)$ přes horní polorovinu, $\sqrt{1}=-1$

9. $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$, φ je polokružnice $|z|=1$, z bodu (1,0) do $(-1,0)$ přes dolní polorovinu, $\sqrt{1}=1$

10. $\displaystyle\int_\varphi \ln z\,\mathrm{d}z$, φ je kružnice $|z|=1$, $\ln 1=0$

11. $\displaystyle\int_\varphi \ln z \,\mathrm{d}z$, φ je kružnice $|z| = 1$, $\ln \mathrm{i} = \frac{\pi \mathrm{i}}{2}$

12. $\displaystyle\int_\varphi \ln z \,\mathrm{d}z$, φ je kružnice $|z| = R$, $\ln 1 = 2\pi \mathrm{i}$

13. Vypočtěte
    a) $\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} \cos x \,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} \sin x \,\mathrm{d}x$
    v Newtonově smyslu, je-li $0 < s < 1$.

14. Následující funkce rozložte v okolí příslušného bodu do mocninné řady a určete poloměr konvergence
    a) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1$ b) $f(z) = \ln^2(1 - z)$, $z_0 = 0$

Komplexní logaritmus, obecná mocnina

Přirozené zavedení: Pro $z = re^{i\varphi}$ je $\ln z = \ln r + i\varphi$

Problém: toto je víceznačná fce, protože φ není určeno jednoznačně!

Řešení: omezit φ na interval délky 2π, např. $(-\pi, \pi)$ nebo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ atp.

Pro kladná reálná x je pak $\ln x$ standardní logaritmus, může však být i $\ln x + 2k\pi i$ pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$.

Obecná mocnina: $z^w := e^{w \log z}$, závisí tedy na větvi logaritmu.

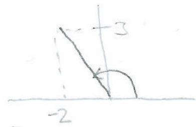
Větve $\ln z$ jsou spojité na oblastech bez příslušných polopřímek (např. pro $(-\pi,\pi)$ je to $\mathbb{C} \setminus \{t; t \le 0\}$). Dokonce jsou holomorfní a platí $(\ln z)' = \frac{1}{z}$. Je potřeba dávat pozor při přechodu polopřímek nespojitosti. Obecně neplatí $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$, jen

$$\exists k \in \mathbb{Z} : \ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i$$

---

1) a) $\ln(-1) = \ln(e^{i\pi}) = i\pi + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$

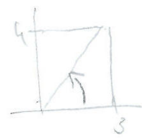
b) $\ln(i) = \ln(e^{i\pi/2}) = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$



c) $\ln(-2+3i) = \ln(\sqrt{13}\, e^{i\alpha}) = \frac{1}{2}\ln 13 + i\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

---

2) a) $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 1} = e^{\sqrt{2}\cdot\ln(e^{i0})} = e^{\sqrt{2}(2k\pi i)} = \cos(\sqrt{2}\cdot 2k\pi) + i\sin(\sqrt{2}\, 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$



b) $2^i = e^{i\ln 2} = e^{i\cdot\ln(2e^{i0})} = e^{i(\ln 2 + 2k\pi i)} = e^{-2k\pi}\cdot(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2), \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $(3+4i)^{1+i} = \exp[(1+i)\ln(3+4i)] = \exp\left[(1+i)\cdot\left(\ln 5 + i\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2k\pi i\right)\right]$

$= 5\cdot e^{-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}\cdot e^{-2k\pi}\cdot\left[\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\left(\ln 5 + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i\,\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\left(\ln 5 + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}$

---

3) $f(z) = (z-1)^{1/3} = \exp\left[\frac{1}{3}\ln(z-1)\right] = \exp\left[\frac{1}{3}\ln|z-1|\right]\cdot e^{i\frac{1}{3}\operatorname{Arg}(z-1)}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\operatorname{Arg}(z-1) = \operatorname{Arg} f(z)$ $\quad z = 2e^{it},\ t \in (0, 2\pi)$ $\quad \operatorname{Arg}(2e^{it}-1)$ bychom asi byli schopni vyjádřit jako fci od t, ale nebude to potřeba. Stačí si uvědomit, že je-li $\operatorname{Arg}(2e^{i0}-1) = 0$, pak pro $t \to 2\pi-$ bude $\operatorname{Arg}(2e^{it}-1) \to 2\pi$ a proto $\operatorname{Arg} f(z) \to \frac{2\pi}{3}$

To platí proto, že křivka 2e^(it)-1 oběhne počátek.

Známe-li $\operatorname{Arg} f(z)$, pak $\ln f(z) = e^{|f(z)|}\cdot\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\operatorname{Arg} f(z)$

---

4) $f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} = \exp\left[\frac{1}{2}\ln\frac{z-1}{z+1}\right] \Rightarrow$ zajímá nás $\frac{1}{2}\operatorname{Arg}\frac{z-1}{z+1}$

Zde už vyjádříme $\left.\frac{z-1}{z+1}\right|_{z=2e^{it}} = \frac{2\cos t - 1 + 2i\sin t}{2\cos t + 1 + 2i\sin t} = \frac{(4\cos^2 t - 1) + 4\sin^2 t + 4i\sin t}{5 + 4\cos t} = \frac{3 + 4i\sin t}{5 + 4\cos t}$

$= \frac{\sqrt{9 + 16\sin^2 t}}{5 + 4\cos t}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{9+16\sin^2 t}} + i\frac{4\sin t}{\sqrt{9+16\sin^2 t}}\right)$ toto je ve tvaru r(cos A + isin A), A=Arg (z-1)/(z+1)

$\Rightarrow \cos\operatorname{Arg}\frac{z-1}{z+1} = \frac{3}{\sqrt{9+16\sin^2 t}}$. $t \in (0, 2\pi) \Rightarrow \cos\operatorname{Arg}\frac{z-1}{z+1}$ startuje v 1, dojde do $\frac{3}{5}$ $(t = \frac{\pi}{2})$ a vrátí se do 1 $(t = \pi)$, pak ještě jednou $\Rightarrow \operatorname{Arg}\frac{z-1}{z+1}$ se nemůže dostat jinam než do $0 \Rightarrow \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\frac{z-1}{z+1} = 0$

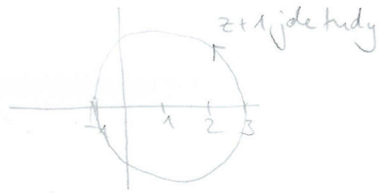
jinými slovy křivka neoběhne počátek

5) $f(z) = 2\ln z \quad | z = 2e^{it} \Rightarrow \tilde{f}(t) = 2\ln(2e^{it}) = 2(\ln 2 + it) = 2\ln 2 + 2it$

t jde od 0 do 2π spojitě $\Rightarrow \operatorname{Im} f(z) = 4\pi$ pro $t \to 2\pi$.

---

6) $f(z) = \ln z + \ln(z+1) \quad | z = 2e^{it} \Rightarrow \tilde{f}(t) = \ln 2 + it + \ln(1 + 2e^{it})$



$z+1$ projde za počátkem, tedy taky nakonec dá 2π, stejně jako z ($z+3$ by ale např. dalo nulu, protože by prošlo před počátkem)

$\Rightarrow \operatorname{Im} f(z) = 4\pi$ pro $t \to 2\pi$

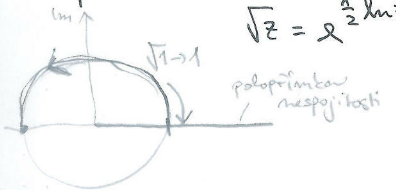
Šlo by zjistit i z vyjádření $\ln(1+2e^{it}) = \ln\sqrt{5+4\cos t} + iA(t)$, kde $\cos A(t) = \dfrac{1+2\cos t}{\sqrt{5+4\cos t}}$

$\sin A(t) = \dfrac{2\sin t}{\sqrt{5+4\cos t}}$

a úvahou, že aby $A(t)$ byla spojitá, musí stejně jako t dojít do 2π.

---

7) $\displaystyle\int_\varphi \frac{dz}{\sqrt{z}} \qquad \varphi(t) = e^{it}, \ t \in (0, \pi), \ \sqrt{1} = 1$



$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\ln z}$

$= \exp\left(\frac{1}{2}\ln|z| + i\frac{1}{2}\operatorname{Arg} z\right)$

V bodě $1 = 1 + 0i$ Chceme $\sqrt{1} = 1$

$\Rightarrow \exp\left(i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow \frac{\operatorname{Arg} z}{2} = 0 + 2k\pi$

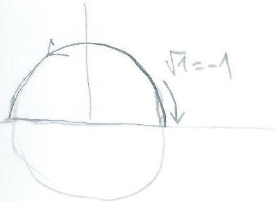
Zvolíme např. $k = 0$.

$\frac{\operatorname{Arg} z}{2}$ tak startuje z nuly pro $t = 0$ a skončí v $\frac{\pi}{2}$ pro $t = \pi$.

$$\int_\varphi \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi \frac{ie^{it}\,dt}{e^{it/2}} = i\int_0^\pi e^{it/2}\,dt = i \cdot \frac{2}{i}\left[e^{i\frac{t}{2}}\right]_0^\pi = 2\cdot\left(e^{i\pi/2} - e^0\right) = 2\cdot(i-1)$$

---

8) $\displaystyle\int_\varphi \frac{dz}{\sqrt{z}}, \ \varphi(t) = e^{it}, \ t \in (0, \pi), \ \sqrt{1} = -1$



Opět $\sqrt{z} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln|z| + \frac{i}{2}\operatorname{Arg} z\right)$ Chceme $\sqrt{1} = -1$

tj. $\exp\left(i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}\right) = -1$

$\frac{\operatorname{Arg} z}{2} = \pi + 2k\pi$

$\frac{\operatorname{Arg} z}{2}$ tak startuje z hodnoty π pro $t = 0$

a skončí v hodnotě $\frac{3}{2}\pi$ pro $t = \pi$

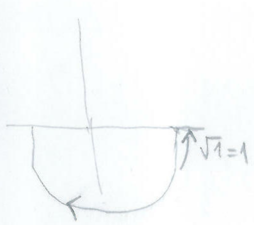
Proto $\displaystyle\int_\varphi \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi \frac{ie^{it}\,dt}{e^{i(\pi + \frac{t}{2})}} = \frac{i}{e^{i\pi}}\int_0^\pi e^{i\frac{t}{2}}\,dt = -i\frac{2}{i}\left[e^{i\frac{t}{2}}\right]_0^\pi = \underline{-2\cdot(i-1)}$

---

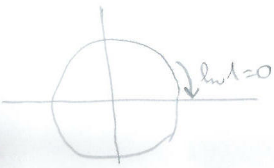
9) $\displaystyle\int_\varphi \frac{dz}{\sqrt{z}}, \ \varphi(t) = e^{it}, \ t \in (2\pi, \pi), \ \sqrt{1} = 1$. Stejně jako dříve $\frac{\operatorname{Arg} z}{2} = 0 + 2k\pi$

$\frac{\operatorname{Arg} z}{2}$ startuje z hodnoty 0 pro $t = 2\pi$, proto $\sqrt{z} = e^{i(\pi + \frac{t}{2})}$, aby $t = 2\pi$ dalo $e^{i\cdot 2\pi} = 1$

$$\int_\varphi \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_{2\pi}^\pi \frac{ie^{it}\,dt}{e^{i(\pi + t/2)}} = -i\int_{2\pi}^\pi e^{it/2}\,dt = i\int_\pi^{2\pi} e^{it/2}\,dt = 2\left[e^{i\frac{t}{2}}\right]_\pi^{2\pi} = 2\cdot(-1-i)$$



10) $\int_\varphi \ln z \qquad \varphi(t)=e^{it},\ t\in(0,2\pi),\ \ln 1 = 0$



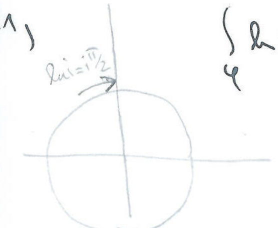
$\ln z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$. Chceme $\ln 1 = 0$, proto $\mathrm{Arg}\,z = 0$ pro $t=0$.

Proto $$\int_\varphi \ln z = \int_0^{2\pi} it\cdot ie^{it}\,dt = -\int_0^{2\pi} te^{it}\,dt = -\left(\left[t\cdot\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{i}\int_0^{2\pi}e^{it}\,dt\right)$$

$$= -\frac{2\pi}{i} + \frac{1}{i}\cdot\left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{2\pi} = \underline{2\pi i}$$

---

11) $\int_\varphi \ln z$. Zvolený bod k určení větve logaritmu nás vede k parametrizaci



$t\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5}{2}\pi\right),\ \varphi(t)=e^{it}$

$\ln z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$, $\ln i = i\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{Arg}\,z = \frac{\pi}{2}$ pro $t=\frac{\pi}{2}$ OK.

$$\int_\varphi \ln z = \int_{\pi/2}^{\frac{5}{2}\pi} it\cdot ie^{it}\,dt = -\int_{\pi/2}^{\frac{5}{2}\pi} te^{it}\,dt$$

$$= -\left(\left[\frac{t}{i}e^{it}\right]_{\pi/2}^{\frac{5}{2}\pi} - \frac{1}{i}\int_{\pi/2}^{\frac{5}{2}\pi} e^{it}\,dt\right) = -\frac{5\pi}{2i}\cdot i + \frac{\pi}{2i}\cdot i + \frac{1}{i}\left[\frac{e^{it}}{i}\right]_{\pi/2}^{\frac{5}{2}\pi} = \underline{-2\pi}$$

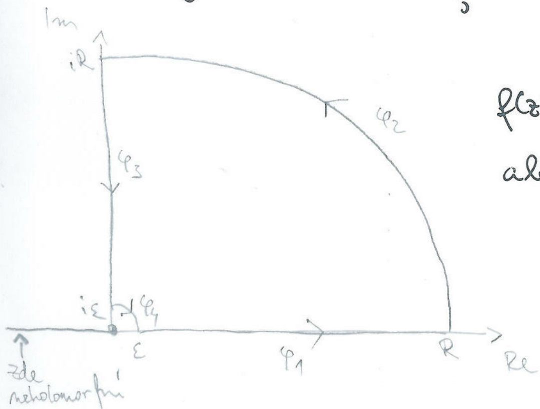
---

12) DÚ

---

13) $\int_0^\infty x^{s-1}\cos x\,dx \qquad \int_0^\infty x^{s-1}\sin x\,dx \qquad s\in(0,1)$

Pro oboji spočítáme $\int_0^\infty x^{s-1}e^{ix}\,dx$ jako $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ R\to+\infty}} \int_\varepsilon^R x^{s-1}e^{ix}\,dx$



$f(z) = z^{s-1}e^{iz}$ $\qquad z^{s-1}$ je holomorfní mimo polopřímku $t\leq 0$

ale naše oblast je mimo $\Rightarrow$ Cauchyho věta, $\int_\varphi f(z)\,dz = 0$

$\int_{\varphi_1}$ chceme

$$\int_{\varphi_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi/2}\left(e^{it}\right)^{s-1}\cdot R^{s-1}\cdot e^{i(Re^{it})}\cdot iRe^{it}\,dt$$

$$= R^s i\int_0^{\pi/2}\left(e^{it}\right)^s e^{i(Re^{it})}\,dt = R^s i\int_0^{\pi/2} e^{i(st+R\cos t+iR\sin t)}\,dt$$

$$= R^s i\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\cdot e^{i(st+R\cos t)}\,dt$$

Pozorování: $\left|e^{i(st+R\cos t)}\right| = 1 \Rightarrow \left|\int_{\varphi_2} f(z)\,dz\right| \leq R^s\cdot\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt \leq R^s\int_0^{\pi/2} e^{-R\cdot\frac{2t}{\pi}}\,dt = \frac{\pi R^{s-1}}{2}\left(1-e^{-R}\right)$

$\longrightarrow 0$ pro $R\to+\infty$ protože $s<1$!

$$\int_{\varphi_3} f(z)\,dz = \int_R^\varepsilon i^{s-1}t^{s-1}e^{-t}\,i\,dt = -i^s\int_\varepsilon^R t^{s-1}e^{-t}\,dt = -e^{s\cdot\ln i}\int_\varepsilon^R t^{s-1}e^{-t}\,dt \qquad \ln i = i\frac{\pi}{2}$$

$\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\varphi_3} f(z)\,dz = -e^{i\frac{\pi}{2}s}\cdot\Gamma(s)$, protože $\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt =: \Gamma(s)$

$\int_{\varphi_4} f(z)\,dz$ dle Tvrzení z příkladu 6 z předchozí série.

$$\lim_{z\to 0} f(z)\cdot z = \lim_{z\to 0} z^s\cdot e^{iz} = 0 \qquad z^s \to 0,\ e^{iz} \text{ omezená}$$

$$\Rightarrow A = 0,\ b = \pi/2 \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varphi_4} f(z)\,dz = -iAb = 0$$

... opačný směr probíhání

Celkem tedy $\displaystyle\int_0^\infty z^{s-1} e^{iz}\,dz = e^{i\frac{\pi}{2}s}\cdot\Gamma(s)$

$$\Rightarrow \int_0^\infty x^{s-1}\cos x\,dx = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{2}s}\,\Gamma(s)\right) = \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(s)$$

$$\int_0^\infty x^{s-1}\sin x\,dx = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{2}s}\,\Gamma(s)\right) = \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(s)$$

14) Příště