Sada příkladů 10/11

Distribuce

1. Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:
   a) $x^k D^n \delta_0, \quad k, n \in \mathbb{N}$ b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\omega} D^n \delta_0, \quad \omega \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

2. Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:
   a) $|x|^2 \Delta \delta_0$ b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\omega)} \Delta^k \delta_0, \quad \omega \in \mathbb{R}^N, k \in \mathbb{N}$
   c) $\mathrm{e}^{-a|x|^2} \Delta \delta_0, \quad a > 0$

3. Určete distribuce $\Delta T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:
   a) $u(x) = |x|^\lambda, \quad \lambda \geq 2 - N, N \geq 2$ b) $u(x) = \ln |x|$

4. Dokažte: Nechť f je hladká funkce na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A_k = f_+^{(k)}(0) - f_-^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Potom
$$D^n T_f = T_{f^{(n)}} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k D^{n-1-k} \delta_0.$$

5. Ukažte, že posloupnosti
   a) $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 x^2 + 1}$ b) $g_n(x) = \frac{n}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{n^2 x^2}{4}}$ c) $h_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x}$
   konvergují v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ k δ_0 distribuci.

6. Ukažte, že
$$T_{\frac{1}{x - \mathrm{i}0}} = T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}} + \mathrm{i}\pi \delta_0.$$

7. Nalezněte rozvoj do Fourierových řad pro periodické distribuce:
   a) $T_{\mathrm{p.v.cotg}(\pi x)}$ b) $T_{\mathrm{p.v.tg}(\pi x)}$ c) $T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{\sin(\pi x)}}$

8. Dokažte, že:
   a) $\delta_0 \circ (\mathbb{A}x) = \dfrac{1}{|\det \mathbb{A}|} \delta_0$
   b) $\delta_0 \circ (x + \mathbf{b}) = \delta_{\mathbf{b}}$
   c) $\delta_0 \circ (ax) = \dfrac{1}{|a|^N} \delta_0.$

9. Ukažte, že metoda zavedení distribucí $H_{x_+^\lambda}$ pomocí Taylorova rozvoje testovacích funkcí dává totéž co holomorfní rozšiřování.

10. Ukažte, že limity

$$\lim_{\lambda\to -2m} H_{|x|^\lambda} \qquad \lim_{\lambda\to -2m+1} H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}$$

existují v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a tudíž definují distribuce $H_{x^{-2m}}$ resp. $H_{x^{-2m+1}}$.

11. Dokažte pro $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} H_{(x\pm \mathrm{i}0)^{-k}} &= H_{x^{-k}} \mp \frac{\mathrm{i}\pi(-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1}\delta_0 \\ H_{x^{-k}} &= \frac{1}{2}\Big(H_{(x+\mathrm{i}0)^{-k}} + H_{(x-\mathrm{i}0)^{-k}}\Big) \\ H_{(x+\mathrm{i}0)^{-k}} - H_{(x-\mathrm{i}0)^{-k}} &= -2\pi\mathrm{i}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1}\delta_0. \end{aligned}$$

DISTRIBUCE

$\mathcal{D}(\Omega)$ ... prostor fcí $C^\infty(\Omega)$ s kompaktním nosičem v Ω

Konvergence v $\mathcal{D}(\Omega)$: $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi \iff \varphi_n - \varphi \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} 0 \iff \exists K \subset \Omega$ kompakt t.ž. $\operatorname{supp}(\varphi_n - \varphi) \subset K$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a $D^\alpha(\varphi_n - \varphi) \rightrightarrows 0$ $\forall$ multiindex α

$\mathcal{D}'(\Omega)$ ... množina všech spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{D}(\Omega)$, množina distribucí

(spojitost: $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi \Rightarrow \langle T, \varphi_k \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$)

$T_1 = T_2$ v $\mathcal{D}'(\Omega) \iff \langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Př: $f \in L^1_{loc}(\Omega)$: $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definujeme jako $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi \, dx$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Každá taková T_f se nazývá regulární distribuce

Př: $x \in \mathbb{R}^N$: $\delta_x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ definujeme jako $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ... Diracova distr.

Př: $T_{\text{p.v.}\frac{1}{x}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definujeme jako $\langle T_{\text{p.v.}\frac{1}{x}}, \varphi \rangle = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Konvergence: $\{T_k\}_1^\infty \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pak $T_k \xrightarrow{*} T$ (T_k konverguje slabě * k T), pokud

$T_k(\varphi) = \langle T_k, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Takto lze definovat $\sum_{k=1}^\infty T_k = T$ jako $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n T_k$, kde lim je chápána ve smyslu $\xrightarrow{*}$

Věta: Pokud $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\exists \lim_{k\to\infty} T_k(\varphi)$, pak $T(\varphi) := \lim_{k\to\infty} T_k(\varphi)$ splňuje $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a

$T_k \xrightarrow{*} T$

Kalkulus distribucí: Součin distribuce s hladkou fcí: $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a \in C^\infty(\Omega)$, pak $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$aT(\varphi) = T(a\varphi)$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Př: $x\delta_0$: $\langle x\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, x\varphi \rangle = x\varphi(x)|_{x=0} = 0 \Rightarrow x\delta_0 \equiv 0$!

Derivace distribuce: $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, α multiindex dimenze N, ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$):

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Zobrazení $T \mapsto D^\alpha T$ je spojité vzhledem k $\xrightarrow{*}$

Další teorie níže, až na to přijde řada.

1) a) $T = x^k D^n \delta_0$, $k,n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle T,\varphi\rangle = \langle D^n\delta_0, x^k\varphi\rangle = (-1)^n \langle \delta_0, D^n(x^k\varphi)\rangle = (-1)^n \sum_{j=0}^n \left[\binom{n}{j} D^j(x^k)\, D^{n-j}\varphi\right](0)$$

$$= (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (D^j(x^k))(0)\, D^{n-j}\varphi(0)$$. Ovšem $D^j x^k(0) \neq 0$ jen pro $j=k$!

$$= (-1)^n \binom{n}{k} k!\, D^{n-k}\varphi(0)$$ pro $k\le n$. Je-li $k>n$, je $\underline{T=0}$

$$= (-1)^n\binom{n}{k} k!\, \langle \delta_0, D^{n-k}\varphi\rangle =$$

$$\Rightarrow \underline{T = (-1)^k \binom{n}{k} k!\, D^{n-k}\delta_0} \quad \text{pro } k \le n$$

b) $T = e^{ix\omega} D^n\delta_0$, $\omega\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle T,\varphi\rangle = \langle D^n\delta_0, e^{ix\omega}\varphi\rangle = (-1)^n\langle\delta_0, D^n(e^{ix\omega}\varphi)\rangle = (-1)^n\sum_{j=0}^n D^j(e^{ix\omega})(0)\, D^{n-j}\varphi(0)\binom{n}{j}$$

$$D^j(e^{ix\omega}) = (i\omega)^j e^{ix\omega} \Rightarrow D^j(e^{ix\omega})(0) = (i\omega)^j$$

$$\Rightarrow \langle T,\varphi\rangle = (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(i\omega)^j D^{n-j}\varphi(0) = (-1)^n\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}(i\omega)^j\langle\delta_0, D^{n-j}\varphi\rangle$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j}(i\omega)^j D^{n-j}\delta_0 = \sum_{j=0}^n\binom{n}{j}(-i\omega)^j D^{n-j}\delta_0$$

2) a) $T = |x|^2\Delta\delta_0$, $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$

$$\langle T,\varphi\rangle = \langle\Delta\delta_0, |x|^2\varphi\rangle = \langle\delta_0,\Delta(|x|^2\varphi)\rangle.$$

Zde $$\Delta(|x|^2\varphi) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left((x_1^2+\dots+x_N^2)\varphi\right) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2x_j\varphi + |x|^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = \sum_{j=1}^N 2\varphi + 2x_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + 2x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + |x|^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}$$

$$= \langle\delta_0, 2N\varphi + 4x\cdot\nabla\varphi + |x|^2\Delta\varphi\rangle = 2N\varphi(0)$$

$$\Rightarrow \underline{T = 2N\delta_0}$$

b) $T = e^{ix\cdot\omega}\Delta^k\delta_0$, $\omega\in\mathbb{R}^N$, $k\in\mathbb{N}$

$$\langle T,\varphi\rangle = \langle\Delta^k\delta_0, e^{ix\cdot\omega}\varphi\rangle = \langle\delta_0,\Delta^k(e^{ix\cdot\omega}\varphi)\rangle$$

Zde $$\Delta(e^{ix\cdot\omega}\varphi) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(e^{ix\cdot\omega}\varphi) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(i\omega_j e^{ix\cdot\omega}\varphi + e^{ix\cdot\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial_j}\right)$$
$$= \sum_j -\omega_j^2 e^{ix\cdot\omega}\varphi + 2i\omega_j e^{ix\cdot\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial_j} + e^{ix\cdot\omega}\frac{\partial^2\varphi}{\partial_j^2}$$
$$\Rightarrow \Delta(e^{ix\cdot\omega}\varphi) = (-|\omega|^2\varphi + 2i\omega\cdot\nabla\varphi + \Delta\varphi)\cdot e^{ix\cdot\omega}$$

Pro $k=1$ to ještě celkem jednoduše lze, vyjde

$$T = (-|\omega|^2\delta_0 - 2i\omega\cdot\nabla\delta_0 + \Delta\delta_0)$$

Pro vyšší k vyjdou hrozivé kombinace derivací do řádu $2k$, zdá se, že v zadání by mělo být jen $k=1$, protože to nelze nijak hezky zjednodušit, v zásadě se k-krát použije operátor $(-|\omega|^2 Id - 2i\omega\cdot\nabla + \Delta)$ na δ_0

c) DÚ

3 a) Určete $\Delta T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ je-li $u(x) = |x|^\lambda$, $\lambda \geq 2-N$, $N \geq 2$ (3)

Věta: Nechť $f(x) = R(r)$, $r = |x|$. Nechť $R(r), R'(r)$ a $R''(r)$ jsou spojité na $(0,\infty)$ a $\Delta f \in L^1_{loc}$. Nechť ex. $\lim\limits_{r\to 0_+} r^{N-1} R'(r) = A \in \mathbb{R}$.

Pak $\Delta T_f = T_{\Delta f} + A \cdot \kappa_N \delta_0$, kde κ_N je povrch jednotkové sféry v $\mathbb{R}^N$

Důkaz: $\langle \Delta T_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \Delta\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f \Delta\varphi \, dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0+ \\ b\to\infty}} \int_{K_{\varepsilon,b}} f \Delta\varphi \, dx = \lim \int_{K_{\varepsilon,b}} \operatorname{div}(f \nabla\varphi) - \nabla f \cdot \nabla\varphi \, dx$

$$\boxed{K_{\varepsilon,b} = \{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon < |x| < b\}}$$

$= \lim \int_{K_{\varepsilon,b}} \operatorname{div}(f \nabla\varphi) - \operatorname{div}(\varphi \nabla f) + \varphi \Delta f \, dx$ = Gaussova věta

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} (f\nabla\varphi - \varphi\nabla f)\cdot n \, dS + \lim\limits_{b\to\infty} \int_{S_b} (f\nabla\varphi - \varphi\nabla f)\cdot n \, dS + \langle T_{\Delta f}, \varphi \rangle$

$\int_{S_b}$: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \varphi$ má kompaktní nosič $\Rightarrow$ pro dost velké b je $\varphi = \nabla\varphi = 0$ a $\lim\limits_{b\to\infty} \int_{S_b} = 0$

$\int_{S_\varepsilon}$: $\left| \int_{S_\varepsilon} f \nabla\varphi \cdot n \, dS \right| \leq R(\varepsilon) \cdot \max\limits_{S_\varepsilon} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right| \cdot \kappa_N \cdot \varepsilon^{N-1}$ (f je radiální a na S_ε má jedinou hodnotu!)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R(\varepsilon)\varepsilon^{N-1} = \lim \frac{R(\varepsilon)}{\varepsilon^{1-N}} = \lim \frac{R'(\varepsilon)}{(1-N)\varepsilon^{-N}} = \lim \underbrace{\frac{\varepsilon}{1-N}}_{\to 0} \cdot \underbrace{R'(\varepsilon)\cdot\varepsilon^{N-1}}_{\to A} = 0 \cdot A = 0$$

$\int_{S_\varepsilon} \varphi \nabla f \cdot n \, dS = \int_{S_\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) \nabla f \cdot n \, dS + \int_{S_\varepsilon} \varphi(0) \nabla f \cdot n \, dS = (*)$

$$\left[f(x) = R(r) \Rightarrow \nabla f \cdot n = \frac{dR}{dr} \nabla r \cdot n = R'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{(-\vec{r})}{r} = -R'(r) \right]$$

$$\Rightarrow (*) = \underbrace{\int_{S^\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) \cdot (-R'(\varepsilon)) \, dS}_{\to 0,\ \text{protože } \max\limits_{S^\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| \to 0} + \underbrace{\varphi(0) \cdot (-R'(\varepsilon)) \cdot \kappa_N \cdot \varepsilon^{N-1}}_{\to -A \kappa_N \varphi(0) = \langle -A\kappa_N \delta_0, \varphi \rangle}$$

$\blacksquare$

Použijeme na $f(x) = |x|^\lambda \Rightarrow R(r) = r^\lambda$, $R'(r) = \lambda r^{\lambda-1}$, $\lim\limits_{r\to 0+} r^{N-1} R'(r) = \lambda r^{N+\lambda-2} \to A$ protože $N+\lambda-2 \geq 0$

Konkrétně $A = 0$ pro $\lambda > 2-N$, $A = \lambda = 2-N$ pro $N+\lambda-2 = 0$.

Zbývá spočítat $\Delta R(r)$, Laplace radiální fce je standardní vzorec $\Delta R(r) = R''(r) + \frac{N-1}{r} R'(r)$

$$\Rightarrow \Delta |x|^\lambda = \lambda(\lambda-1)|x|^{\lambda-2} + \frac{N-1}{|x|} \lambda |x|^{\lambda-1} = \lambda \cdot (\lambda+N-2)|x|^{\lambda-2}$$

Proto je pro $\lambda = 2-N$: $\Delta T_{|x|^\lambda} = (2-N)\kappa_N \delta_0$

a pro $\lambda > 2-N$: $\Delta T_{|x|^\lambda} = \lambda(\lambda+N-2) T_{|x|^{\lambda-2}}$

b) Totéž pro $R(r) = \ln r \Rightarrow R'(r) = \frac{1}{r}, \quad R''(r) = -\frac{1}{r^2}$

$$\lim_{r \to 0_+} r^{N-1} R'(r) = \lim_{r \to 0_+} r^{N-2} = \begin{cases} 1 & \text{pro } N = 2 \\ 0 & \text{pro } N \geq 3 \end{cases}$$

$$\Delta \ln |x| = -\frac{1}{|x|^2} + \frac{N-1}{|x|} \cdot \frac{1}{|x|} = (N-2)\frac{1}{|x|^2}$$

Tedy pro $N = 2$ je $\Delta T_{\ln|x|} = 2\pi \delta_0$

a pro $N \geq 3$ je $\Delta T_{\ln|x|} = (N-2) T_{\frac{1}{|x|^2}}$

4) $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $A_k = f_+^{(k)}(0) - f_-^{(k)}(0)$ pro $k = 0, \ldots, n-1$

$$\langle D^n T_f, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T_f, D^n \varphi \rangle = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f \varphi^{(n)} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{0} f \varphi^{(n)} dx + (-1)^n \int_{0}^{\infty} f \varphi^{(n)} dx$$

Budeme integrovat per partes a přemisťovat derivace z φ na f. Hraniční členy v $\pm\infty$ jsou vždy nula, protože φ má kompaktní nosič. Členy v 0 ale nulové nejsou!

$$\Rightarrow \langle D^n T_f, \varphi \rangle = (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{0} f' \varphi^{(n-1)} dx + (-1)^n f_-(0) \varphi^{(n-1)}(0) + (-1)^{n-1} \int_{0}^{\infty} f' \varphi^{(n-1)} dx - (-1)^n f_+(0) \varphi^{(n-1)}(0)$$

$$= (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{0} f' \varphi^{(n-1)} dx + (-1)^{n-1} \int_{0}^{\infty} f' \varphi^{(n-1)} dx + (-1)^{n-1} A_0 \varphi^{(n-1)}(0)$$

$= \ldots$ dalších $(n-1)$ per partes ...

$$= \int_{-\infty}^{0} f^{(n)} \varphi \, dx + \int_{0}^{\infty} f^{(n)} \varphi \, dx + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j A_{n-1-j} \varphi^{(j)}(0)$$

$$= \langle T_{f^{(n)}}, \varphi \rangle + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-1-j} \langle D^j \delta_0, \varphi \rangle$$, což jsme měli dokázat

5a) $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 x^2 + 1}$

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{n^2 x^2 + 1} \varphi(x) \, dx = \left| \begin{matrix} y = nx \\ dy = n\,dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\frac{y}{n})}{y^2 + 1} dy$$

φ hladká $\Rightarrow |\varphi(\frac{y}{n})| \leq K$

$\frac{K}{y^2+1}$ je integrovatelná majoranta

$$\lim_{n \to \infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(\frac{y}{n})}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{\pi} \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow T_{f_n} \xrightarrow{*} \delta_0$$

5b) $g_n(x) = \frac{n}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n^2 x^2}{4}}$

$$\langle T_{g_n}, \varphi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 x^2}{4}} n \varphi(x) dx = \left| \begin{matrix} y = \frac{nx}{2} \\ dy = \frac{n}{2} dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \varphi\left(\frac{2y}{n}\right) dy$$

φ hladká $\Rightarrow |\varphi(\frac{2y}{n})| \leq K$

$K e^{-y^2}$ je int. maj.

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \langle T_{g_n}, \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \to \infty} e^{-y^2} \varphi\left(\frac{2y}{n}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow T_{g_n} \xrightarrow{*} \delta_0$$

c) $h_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(nx)}{x}$. Zde neprojde předchozí postup, máme problémy s integrovatelnou majorantou (5)

<u>Lemma</u> (23.5.11): $\{f_k\}_1^\infty \subset C(\mathbb{R})$ je t.ž. $\forall M>0\ \exists C>0$:

$$-M \leq a<b\leq M \Rightarrow \left|\int_a^b f_k(x)\,dx\right| \leq C \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Nechť navíc $\forall (a,b)\subset\mathbb{R}$ omezený platí: $\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0\in(a,b) \\ 0 & \text{pro } 0\notin[a,b]\end{cases}$

Pak $T_{f_k} \xrightarrow{*} \delta_0$

Ověříme, že h_n splňuje předpoklady lemmatu: $C(\mathbb{R})$ ✓ ... spojitě dodefinujeme hodnotou $\frac{n}{\pi}$ v nule

M libovolné: $-M\leq a<b\leq M$: $\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sin nx}{x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sin nx}{nx}\,n\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{na}^{nb}\frac{\sin y}{y}\,dy$

Je-li $a<0<b$: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{na}^{nb}\frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy = 1$ (viz cvičení 4)

Je-li $a<b<0$: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{na}^{nb}\frac{\sin y}{y}\,dy = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{na}^{0}\frac{\sin y}{y}\,dy - \frac{1}{\pi}\int_{nb}^{0}\frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin y}{y} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin y}{y} = 0$

Stejně pro $0<a<b$.

To využijeme také k ověření prvního předpokladu: Je-li $a<0<b$, pak

$\int_a^b h_n(x)\,dx = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{na}^{nb}\frac{\sin y}{y}\,dy}_{I_n}$. Protože $\lim_{n\to\infty} I_n = 1$ a $\exists n_0>0\ \forall n\geq n_0: |I_n|\leq 2$

Je-li $a<b<0$ nebo $0<a<b$, pak $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$: $\exists n_0>0\ \forall n\geq n_0: |I_n|\leq 2$

Je-li $a=0$ nebo $b=0$, je $\lim I_n = \frac{1}{2}$ a opět $\exists n_0>0\ \forall n\geq n_0: |I_n|\leq 2$

$\Rightarrow$ Předpoklady jsou splněny $\Rightarrow T_{h_n} \xrightarrow{*} \delta_0$

---

6) $T_{\frac{1}{x-i0}} = \lim_{y\to 0_-} T_{\frac{1}{x+iy}}$. Uvažujme funkci $f_y(x) = \log(x+iy)$, kde $y<0$ je parametr a bereme větev logaritmu s argumentem s hodnotami v intervalu $(-\pi,\pi)$

$\log(x+iy) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\arg(x+iy)$. Je-li x pevné, $\arg(x+iy)$ se pro $y\to 0_-$ blíží buď 0 (pro $x>0$), nebo $-\frac{\pi}{2}$ ($x=0$) nebo $-\pi$ ($x<0$)

Proto pro $y\to 0_-$ (přesněji pro posloupnost $y_k\to 0_-$) je

$$\langle T_{f_y},\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\varphi(x)\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\arg(x+iy)\,\varphi(x)\,dx$$

a $\lim_{y\to 0_-}\langle T_{f_y},\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\,\varphi(x)\,dx + i\cdot(-\pi)\cdot\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx = \langle T_{\ln|x|},\varphi\rangle - i\pi\langle T_{H(-x)},\varphi\rangle$,

kde $H(x)$ je Heavisidova fce $H(x)=0$ pro $x<0$
$H(x)=1$ pro $x>0$

Protože $\frac{\partial}{\partial x} \log(x+iy) = \frac{1}{x+iy}$,

máme $T_{\frac{1}{x+iy}} = D T_{\log(x+iy)} \xrightarrow{y \to 0-} D T_{\ln|x|} - i\pi D T_{H(-x)}$, tedy

$$\langle T_{\frac{1}{x+iy}}, \varphi \rangle \xrightarrow{y\to 0^-} - \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \varphi'(x) dx + i\pi \int_{-\infty}^{\infty} H(-x) \varphi'(x) dx$$

$$= \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx + i\pi \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x) dx = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx + i\pi \varphi(0)$$

a tedy $T_{\frac{1}{x-i0}} = T_{\text{p.v.}\frac{1}{x}} + i\pi \delta_0$

Dodatek: zavedení distribuce T_{f.p. 1/x^2} jako druhé derivace logaritmu tak, jak je ve skriptech v příkladě 23.5.9.